



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Στ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Ημερομηνία: 10/12/2016

Ώρα Εξέτασης: 09:30-11:30

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

**Πρόβλημα 1**

Στην πιο κάτω αριθμητική πυραμίδα να βρείτε το άθροισμα των αριθμών της δωδέκατης γραμμής .

			1					
		3		5				
	7		9		11			
13		15		17		19		...

**Λύση**

Για να βρούμε τον πρώτο όρο της δεύτερης γραμμής προσθέσαμε στον πρώτον όρο της προηγούμενης 2 και βρήκαμε το  $1+2 = 3$ . Για να βρούμε στον πρώτο όρο της τρίτης γραμμής προσθέσαμε στον πρώτον όρο της προηγούμενης  $2 + 2$  και βρήκαμε το  $3+2.2 = 7$ . Ο πρώτος όρος της τέταρτης γραμμής είναι  $7 + 3.2 = 13$  της πέμπτης γραμμής είναι  $13 + 4.2 = 21$  της έκτης γραμμής είναι  $21 + 5.2 = 31$  και συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι ο πρώτος όρος της έβδομης είναι 43, της όγδοης είναι 57, της ένατης 63 της δέκατης 91 της ενδέκατης 111 και της δωδέκατης 133. Έτσι η δωδέκατη γραμμή έχει τους όρους:

133 , 135 , 137 , 139 , 141 , 143 , 145 , 147 , 149 , 151 , 153 , 155 .

$$\begin{aligned} & \text{Το άθροισμα } 133 + 135 + 137 + 139 + 141 + 143 + 145 + 147 + 149 + 151 + 153 + 155 = \\ & = (133 + 155) + (135 + 153) + (137 + 151) + (139 + 149) + (141 + 147) + (143 + 145) = \\ & = 288 + 288 + 288 + 288 + 288 + 288 = 6.288 = 1728. \end{aligned}$$

Β' τρόπος

Υπολογίζουμε το άθροισμα κάθε σειράς,

1η σειρά έχει άθροισμα  $1 = 1 \times 1 \times 1$

2η σειρά έχει άθροισμα  $8 = 2 \times 2 \times 2$

3η σειρά έχει άθροισμα  $27 = 3 \times 3 \times 3$

4η σειρά έχει άθροισμα  $64 = 4 \times 4 \times 4$

...

12η σειρά  $12 \times 12 \times 12 = 1728$

## Πρόβλημα 2

Σε μια αίθουσα υπάρχουν 34 παιδιά. Σε κάθε θρανίο μπορεί να καθήσουν 2 παιδιά. Σε θρανία που κάθονται ένα αγόρι με ένα κορίτσι βρίσκονται τα  $\frac{3}{4}$  των αγοριών και τα  $\frac{2}{3}$  των κοριτσιών.

(α) Να βρείτε πόσα κορίτσια έχει στην αίθουσα.

(β) Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό θρανίων στον οποίο κάθετε τουλάχιστον ένα αγόρι.

Λύση

Τα  $\frac{3}{4}$  του αριθμού των αγοριών είναι ίσο με τα  $\frac{2}{3}$  του αριθμού των κοριτσιών

δηλαδή  $\frac{9}{12}$  του αριθμού των αγοριών είναι ίσο με τα  $\frac{8}{12}$  του αριθμού των κοριτσιών.

Δηλαδή για κάθε 9 κορίτσια που έχει η αίθουσα υπάρχουν 8 αγόρια

Άρα συνολικά υπάρχουν 18 κορίτσια και 16 αγόρια.

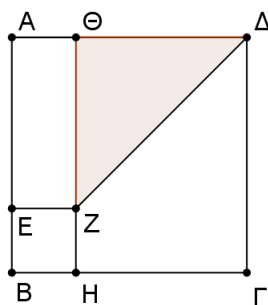
Τα  $\frac{3}{4}$  των αγοριών, ( $\frac{3}{4}$  του 16 = 12) δηλαδή 12 αγόρια κάθονται με κορίτσι άρα χρειάζονται 12 θρανία

Επίσης τα υπόλοιπα 4 αγόρια μπορούν να καθίσουν ανα δύο σε κάθε θρανίο άρα χρειάζονται ακόμα 2 θρανία

Συνολικά 14 θρανία χρειάζονται για να καθίσουν όλα τα αγόρια

## Πρόβλημα 3

Στο πιο κάτω σχήμα τα ABΓΔ και EZHB είναι τετράγωνα. Αν το εμβαδό του EZHB είναι 9 τετ. εκατ. και το εμβαδό του ΘΔΖ είναι 32 τετ. εκατ. Να βρείτε το εμβαδό του ΑΘΖΕ και το εμβαδό του ΔΓΗΖ.



Λύση

Αφού το εμβαδό τετραγώνου EZHB είναι 9 τετ. εκατ. το EB είναι 3 εκ. και αφού το εμβαδό

ισοσκελούς τριγώνου ΔΘΖ είναι 32 τετ. εκατ. τότε το ΘΖ είναι 8 εκ. Αφού το ΘΖ είναι 8 εκ. και το ΖΗ 3 εκ. η πλευρά του τετραγώνου είναι 11 τετ. εκατ. οπότε το εμβαδό του ABΓΔ είναι

$11 \cdot 11 = 121$  τετ. εκατ. Το ΘΖ είναι  $11 - 3 = 8$  εκ. και το ΕΖ = 3 εκ. το εμβαδό του ΑΘΖΕ είναι  $3 \cdot 8 = 24$  τετ.εκ. και Το εμβαδό του ΔΓΗΖ =  $121 - 9 - 24 - 32 = 56$  τετ.εκ.

#### Πρόβλημα 4

Να βρείτε ένα τετραψήφιο αριθμό με διαφορετικά ψηφία ο οποίος όταν πολλαπλασιαστεί επί 4, δίνει τον αριθμό αντεστραμμένο.

#### Λύση 1

Έστω ότι ο αρχικός αριθμός είναι  $K = \overline{αβγδ}$  τότε ο τελικός αριθμός θα είναι  $4K = \overline{δγβα}$   
Ο αριθμός  $4K$  είναι τετραψήφιος δηλαδή μικρότερος του 10000, άρα ο αριθμός  $K$  θα είναι μικρότερος του 2500. Δηλαδή οι πιθανές τιμές του πρώτου ψηφίου  $α$  είναι το 1 και το 2. (Σ1)

Ο αριθμός  $4K$  διαιρείται με 4 άρα το  $\overline{βα}$  διαιρείται με το 4 και άρα είναι ζυγός (Σ2)

Από τα (Σ1) και (Σ2) προκύπτει ότι  $α=2$

Αφού  $\overline{βα}$  διαιρείται με το 4 και  $α=2$  τότε πιθανές τιμές για το  $\overline{βα}$  είναι 12, 32, 52, 72, 92  
δηλαδή πιθανές τιμές  $β$  είναι 1,3,5,7,9 (Σ3)

Επειδή  $K$  μικρότερος του 2500 τότε  $\overline{αβ}$  μικρότερο του 25 με  $α=2$  δηλαδή οι πιθανές τιμές του  $β$  περιορίζονται σε 1 και 3.

Αν  $β=3$  τότε ο αριθμός ο  $K$  θα είναι μεταξύ του 2300 και 2400 δηλαδή ο  $4K$  θα είναι μεταξύ 9200 και 9600. Έτσι το  $δ=9$  τότε το  $γ$  είναι 2 ή 3 ή 4 ή 5.

Αν  $γ=2$  τότε  $K = 2329$  και  $4K = 9232$  αλλά  $2329 \times 4 = 9316 \neq 9232$

Αν  $γ=3$  τότε  $K = 2339$  και  $4K = 9332$  αλλά  $2339 \times 4 = 9356 \neq 9332$

Αν  $γ=4$  τότε  $K = 2349$  και  $4K = 9432$  αλλά  $2349 \times 4 = 9396 \neq 9432$

Αν  $γ=5$  τότε  $K = 2359$  και  $4K = 9532$  αλλά  $2359 \times 4 = 9436 \neq 9532$  άρα το  $β \neq 3$

Αν  $β=1$  τότε ο αριθμός  $K$  θα είναι μεταξύ του 2100 και 2200 δηλαδή ο  $4K$  θα είναι μεταξύ 8400 και 8800. Έτσι το  $δ=8$  και πιθανές τιμές για το  $γ$  είναι 4, 5, 6, 7.

Αν  $γ=4$  τότε  $K = 2148$  και  $4K = 8412$  αλλά  $2148 \times 4 = 8592 \neq 8412$

Αν  $γ=5$  τότε  $K = 2158$  και  $4K = 8512$  αλλά  $2158 \times 4 = 8632 \neq 8512$

Αν  $γ=6$  τότε  $K = 2168$  και  $4K = 8612$  αλλά  $2168 \times 4 = 8672 \neq 8612$

Αν  $γ=7$  τότε  $K = 2178$  και  $4K = 8712$  και  $2178 \times 4 = 8712$

άρα ο αριθμός  $K=2178$

#### Λύση 2

Έστω ότι ο αριθμός είναι ο  $αβγδ$ . Αφού ο αριθμός πολλαπλασιαζόμενος επί 4 δίνει γινόμενο τετραψήφιο που υποχρεωτικά θα είναι μεγαλύτερος του 4000, το πρώτο ψηφίο του  $α$  θα ισούται

με 1 ή 2. Το γινόμενο  $δ \times 4$  είναι πάντοτε άρτιος άρα το  $α=2$  και το  $δ=8$ .

Έχουμε  $4 \times (1000 \times α + 100 \times β + 10 \times γ + δ) = 1000 \times δ + 100 \times γ + 10 \times β + α$  και αφού  $α=2$  και  $δ=8$

$$4 \times (2000 + 100 \times β + 10 \times γ + 8) = 8000 + 100 \times γ + 10 \times β + 2$$

$$8000 + 400 \times β + 40 \times γ + 32 = 8000 + 100 \times γ + 10 \times β + 2$$

$$400 \times β + 40 \times γ + 32 = 100 \times γ + 10 \times β + 2$$

$390 \times β + 30 = 60 \times γ$  ή διαιρώντας δια 30  $13 \times β + 1 = 2 \times γ$  και επειδή  $2 \times γ < 20$  σημαίνει  $13 \times β + 1 < 20$  άρα  $β=1$  και  $2 \times γ = 13 + 1 = 14$ , έτσι  $γ=7$ . Ο αριθμός είναι 2178.