ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Ημερομηνία: 21/12/2019 *Ώρα Εξέτασης: 09:30-11:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Ένα ντεπόζιτο πετρελαίου θέρμανσης είναι γεμάτο κατά τα $\frac{2}{5}$. Ρίχνουμε μέσα 99 λίτρα πετρέλαιο και το ντεμπόζιτο γεμίζει στα $\frac{5}{8}$.

(α) Πόσα λίτρα πετρέλαιο χωράει όλο το ντεπόζιτο;

(β) Το πετρέλαιο θέρμανσης στοιχίζει 86 σεντ το λίτρο. Πόσα λεφτά επιπλέον θα χρειαστούμε, αν αποφασίσουμε να γεμίσουμε πλήρως το ντεπόζιτο;

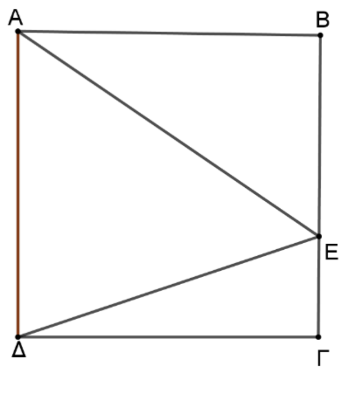
Προτεινόμενη Λύση

α. Στα $\frac{5}{8}-\frac{2}{5}=\frac{25}{40}-\frac{16}{40}=\frac{9}{40}$ αντιστοιχούν τα 99 λίτρα πετρέλαιο.
Άρα στο $\frac{1}{40}$ αντιστοιχούν $99 \div 9 = 11$ λίτρα.
Επομένως όλο το ντεπόζιτο χωράει, $40 \cdot 11 = \mathbf{440}$ **λίτρα πετρέλαιο.**

β. Για επιπλέον πετρέλαιο (για να γεμίσουμε πλήρως το ντεπόζιτο) θα χρειαστούμε ακόμη $\frac{3}{8} \cdot 440 = 165$ λίτρα πετρέλαιο, δηλαδή ένα επιπλέον κόστος $165 \cdot 0{,}86 = \mathbf{€141{,}90}$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο και το σημείο $Ε$ βρίσκεται στην πλευρά $ΒΓ$ του τετραγώνου. Το εμβαδόν των τριγώνων $ΑΒΕ$ και $ΑΔΕ$ είναι διπλάσιο και τριπλάσιο, αντίστοιχα, από το εμβαδόν του τριγώνου $ΓΔΕ$, το οποίο έχει εμβαδόν 6 cm^2. Να υπολογίσετε:



(α) την περίμετρο του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$

(β) το μήκος του $(ΒΕ)$.

Αν προεκτείνουμε τις πλευρές $ΔΕ$ και $ΑΒ$ θα συναντηθούν στο σημείο $Ζ$.

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΕΖ$.

Προτεινόμενη Λύση

α. Αφού το εμβαδόν του τριγώνου $ΓΔΕ$ είναι $E_{ΓΔΕ} = 6\ cm^2$ τότε έχουμε αντίστοιχα $E_{ΑΒΕ} = 12\ cm^2$ και $E_{ΑΔΕ} = 18\ cm^2$.
Έτσι το $E_{ΑΒΓΔ} = 6 + 12 + 18 = 36\ cm^2$.
Επομένως το μήκος της πλευράς του τετραγώνου είναι 6 cm και η περίμετρος του θα είναι ίση με $Π_{ΑΒΓΔ} = 4 \cdot 6 = \mathbf{24\ cm.}$

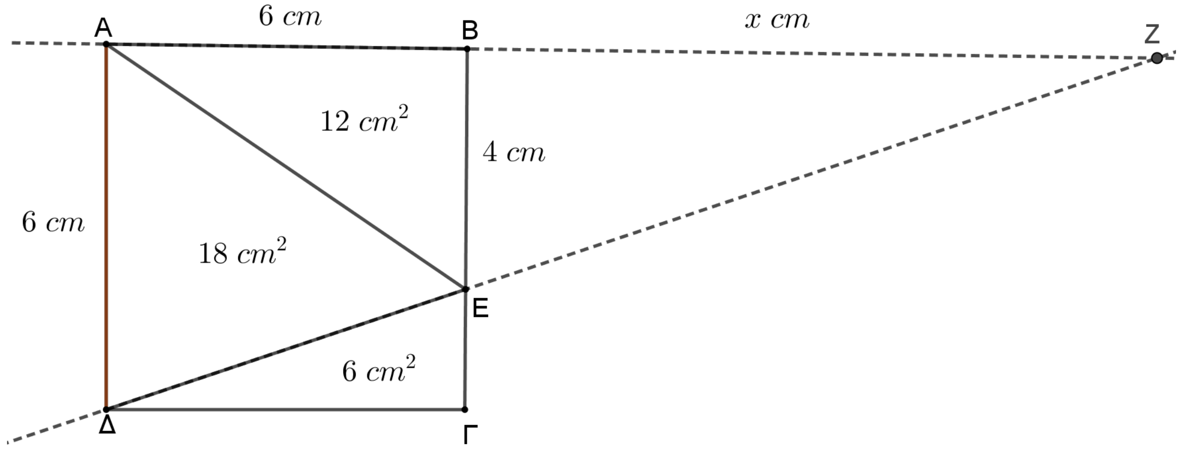
β. Για να είναι $E_{ABE} = 12\ cm^2$ πρέπει $\frac{6 \cdot (BE)}{2} = 12 \Longrightarrow (BE) = 4\ cm$

γ. $E_{BEZ} = \frac{4 \cdot (BZ)}{2} = 2(BZ) = 2x$, με $x = (BZ)$

$E_{A\Delta Z} = \frac{6 \cdot (AZ)}{2} = 3(6 + x) = 18 + 3x.$

Όμως $E_{A\Delta Z} - E_{BEZ} = 30\ cm^2 \Longrightarrow 18 + 3x - 2x = 30 \Longrightarrow 18 + x = 30 \Longrightarrow x = 12\ cm$

Επομέμως $E_{BEZ} = 2x = 2 \cdot 12 = 24\ cm^2$



Πρόβλημα 3

(α) Ένας αριθμός, όταν διαιρεθεί με το 4, 5, 6, 7 ή 8, αφήνει υπόλοιπο 3. Να υπολογίσετε αυτόν τον αριθμό, αν γνωρίζουμε ότι βρίσκεται μεταξύ του 1000 και του 2000.

(β) Ένας φυσικός αριθμός όταν διαιρεθεί με το 7 αφήνει υπόλοιπο 2, ενώ όταν διαιρεθεί με το 13 αφήνει υπόλοιπο 8. Να βρείτε ποιοι φυσικοί αριθμοί από το 1 ως και το 200 έχουν αυτήν την ιδιότητα.

Προτεινόμενη Λύση

α. Αν A είναι ένας αριθμός με την ιδιότητα να αφήνει υπόλοιπο 3 διαιρούμενος με τους αριθμούς 4, 5, 6, 7 ή 8 τότε,

Ο αριθμός: $(A - 3)$ είναι πολλαπλάσιο των αριθμών 4, 5, 6, 7 ή 8.

Το $ΕΚΠ(4, 5, 6, 7$ ή $8) = 840$. Άρα πιθανοί αριθμοί είναι:

$A_1 = 840 + 3 = 843$, $A_2 = 2 \cdot 840 + 3 = 1683$, $A_3 = 3 \cdot 840 + 3 = 2523$ κτλ.

Επομένως ο μόνος αριθμός που είναι μεταξύ του 1000 και 2000 είναι το $A_2 = \mathbf{1683.}$

β. Αν B είναι ένας αριθμός με την ιδιότητα να αφήνει υπόλοιπο 2 διαιρούμενος με τον 7 και να αφήνει υπόλοιπο 8 διαιρούμενος με το 13.

Παρατηρούμε ότι ο $(B + 5)$ είναι πολλαπλάσιο των 7 και 13.

Αφού το $ΕΚΠ(7,13) = 91$ τότε το $(B + 5)$ παίρνει τις τιμές 91 και 182.

Επομένως $B = 91 - 5 = \mathbf{86}$, ή $B = 182 - 5 = \mathbf{177.}$

Πρόβλημα 4

Δίνονται έξι θετικοί ακέραιοι αριθμοί (όχι κατ' ανάγκην διαφορετικοί). Κάθε φορά παίρνουμε πέντε από αυτούς τους έξι αριθμούς και τους προσθέτουμε. Τα πέντε από τα έξι αθροίσματα είναι $51, 60, 63, 68$ και 73. Το έκτο άθροισμα είναι το ίδιο με ένα από τα αυτά τα πέντε αθροίσματα. Να υπολογίσετε το άθροισμα των έξι αρχικών ακέραιων αριθμών.

Προτεινόμενη Λύση

Στα έξι αθροίσματα των πέντε ακέραιων αριθμών ο κάθε ένας αριθμός υπολογίζεται 5 φορές. Επομένως το άθροισμα των έξι αθροισμάτων είναι πολλαπλάσιο του 5.

Προσθέτοντας τα 5 αθροίσματα έχουμε $51 + 60 + 63 + 68 + 73 = 315$ το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 5.

Επομένως το $έκτο$ άθροισμα πρέπει να είναι επίσης πολλαπλάσιο του 5 και έτσι θα είναι ίσο με 60 γιατί είναι το μόνο πολλαπλάσιο του 5 στα πέντε αθροίσματα που μας δόθηκαν.

Έτσι το άθροισμα των 6 αριθμών θα είναι $(315 + 60) \div 5 =$**75**