



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018

ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Ημερομηνία: 08/12/2018

Ώρα Εξέτασης: 09:30-11:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right) \times \dots \times \left(\frac{10}{11}\right) \times \left(\frac{11}{12}\right) \times (4 + 8 + 12 + \dots + 76 + 80)$$

$$B = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9} + \frac{9}{10}\right) + \left(\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \frac{7}{6} + \frac{8}{7} + \frac{9}{8} + \frac{10}{9}\right)$$

Προτεινόμενη Λύση:

$$\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right) \times \dots \times \left(\frac{10}{11}\right) \times \left(\frac{11}{12}\right) = \frac{3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 10 \times 11}{4 \times 5 \times 6 \times \dots \times 11 \times 12} = \frac{3 \times (4 \times 5 \times \dots \times 11)}{(4 \times 5 \times \dots \times 11) \times 12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$4 + 8 + \dots + 76 + 80 = (4 + 80) + (8 + 76) + \dots + (40 + 44) = 10 \times 84 = 840 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) υπολογίζουμε:

$$A = \frac{1}{4} \times 840 = 210$$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9} + \frac{9}{10}\right) + \left(\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \frac{7}{6} + \frac{8}{7} + \frac{9}{8} + \frac{10}{9}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{4}{5} + \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{5}{6} + \frac{7}{6}\right) + \left(\frac{6}{7} + \frac{8}{7}\right) + \left(\frac{7}{8} + \frac{9}{8}\right) + \left(\frac{8}{9} + \frac{10}{9}\right) + \frac{9}{10} + \frac{2}{1} \\ &= \frac{4}{2} + \frac{6}{3} + \frac{8}{4} + \frac{10}{5} + \frac{12}{6} + \frac{14}{7} + \frac{16}{8} + \frac{18}{9} + 2 \frac{9}{10} = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \frac{9}{10} = 18 \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9 δεν θα χρησιμοποιήσουμε ένα αριθμό και θα χωρίσουμε τους υπόλοιπους 8 αριθμούς σε 4 ομάδες των δυο του ίδιου αθροίσματος. Με πόσους τρόπους μπορούμε να το πετύχουμε;

Προτεινόμενη Λύση:

Υπολογίζουμε το άθροισμα των εννέα αριθμών $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

Αφού οι 4 ομάδες που θα χωριστούν οι πιο πάνω αριθμοί θα έχουν το ίδιο άθροισμα συνεπάγεται ότι το άθροισμα των 8 αριθμών που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι πολλαπλάσιο του 4.

Οι περιπτώσεις που συμβαίνει αυτό είναι όταν δεν χρησιμοποιηθούν οι αριθμοί 1, 5 και 9.

Περίπτωση 1 Να μην χρησιμοποιηθεί το 1

Τότε το άθροισμα των αριθμών που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι $45 - 1 = 44$ και της κάθε ομάδας $44 : 4 = 11$. Αυτό μπορεί να συμβεί παίρνοντας τις ομάδες (2,9), (3,8), (4,7) και (5,6).

Περίπτωση 2 Να μην χρησιμοποιηθεί το 5

Τότε το άθροισμα των αριθμών που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι $45 - 5 = 40$ και της κάθε ομάδας $40 : 4 = 10$. Αυτό μπορεί να συμβεί παίρνοντας τις ομάδες (1,9), (2,8), (3,7) και (4,6).

Περίπτωση 3 Να μην χρησιμοποιηθεί το 9

Τότε το άθροισμα των αριθμών που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι $45 - 9 = 36$ και της κάθε ομάδας $36 : 4 = 9$. Αυτό μπορεί να συμβεί παίρνοντας τις ομάδες (1,8), (2,7), (3,6) και (4,5).

Άρα μπορούμε να το πετύχουμε με 3 τρόπους.

Πρόβλημα 3

Σε μια αίθουσα γυμναστικής υπάρχουν άτομα που κάθονται και άτομα που είναι όρθια. Το 20 % των ατόμων που βρίσκονται στην αίθουσα είναι όρθιοι. Μετά από μερικά λεπτά οι μισοί από αυτούς που ήταν όρθιοι κάθισαν και οι μισοί από αυτούς που κάθονταν σηκώθηκαν όρθιοι με αποτέλεσμα ακριβώς 235 άτομα που βρίσκονταν στην αίθουσα να είναι όρθιοι. Να βρείτε πόσα άτομα ήταν όρθια αρχικά στην αίθουσα.

Προτεινόμενη Λύση:

Αρχικά

$$\text{ΟΡΘΙΟΙ} = \frac{1}{5}$$

$$\text{ΚΑΘΙΣΤΟΙ} = \frac{4}{5}$$

Μετά από μερικά λεπτά

$$\text{ΟΡΘΙΟΙ} = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

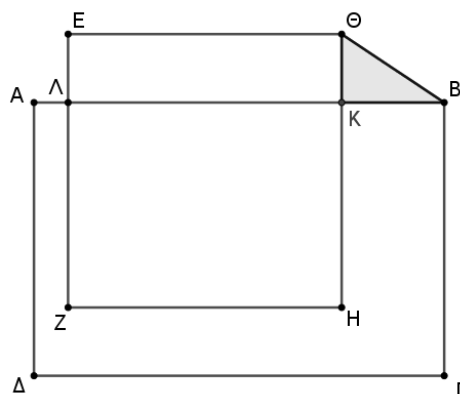
$$\text{ΚΑΘΙΣΤΟΙ} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5} - \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

Τα 235 άτομα που ήταν όρθια μετά από μερικά λεπτά, αντιστοιχούν με τα μισά άτομα που βρίσκονταν στην αίθουσα. Επομένως στην αίθουσα υπήρχαν $2 \times 235 = 470$ άτομα και εξ'αυτών υπήρχαν αρχικά $\frac{1}{5} \cdot 470 = 94$ άτομα όρθια.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο με πλευρά 8 cm και το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με ΑΒ = 12 cm και ΒΓ = 8 cm. Τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ τέμνονται στα σημεία Κ και Λ έτσι ώστε το ΚΛΖΗ να είναι ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το μισό του εμβαδού του ΑΒΓΔ και ΒΚ = 3ΑΛ.

Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΒΚΘ.



Προτεινόμενη Λύση:

$$E_{AB\Gamma\Delta} = 12 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^2.$$

$$E_{K\Lambda ZH} = 96 : 2 = 48 \text{ cm}^2. \quad (1)$$

$$E_{EZH\Theta} = 8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2):

$$E_{\Theta K \Lambda E} = 64 - 48 = 16 \text{ cm}^2 \rightarrow 8 \cdot \Theta K = 16 \rightarrow \boxed{\Theta K = 2 \text{ cm}}$$

$$AB = A\Lambda + \Lambda K + KB \Leftrightarrow 12 = A\Lambda + 8 + 3A\Lambda \Leftrightarrow 12 = 8 + 4A\Lambda \Leftrightarrow 12 - 8 = 4A\Lambda \Leftrightarrow 4 = 4A\Lambda \Leftrightarrow A\Lambda = 1 \text{ cm} \rightarrow \boxed{BK = 3 \text{ cm}}$$

$$E_{BK\Theta} = \frac{\Theta K \cdot BK}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ cm}^2$$