



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2021

ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Ημερομηνία: 18/12/2021 Ώρα Εξέτασης: 09 : 30 – 11 : 30

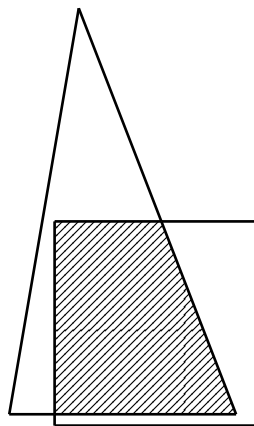
ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Σε έναν πίνακα ζωγραφικής, ένα τρίγωνο είναι τοποθετημένο πάνω σε ένα τετράγωνο, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Η πλευρά του τετραγώνου έχει μήκος 9 cm. Η σκιασμένη περιοχή είναι το κοινό τους κομμάτι, το οποίο καλύπτει τα $\frac{3}{5}$ του τριγώνου και τα $\frac{2}{3}$ του τετραγώνου. Αν η βάση του τριγώνου είναι 10 cm, να υπολογίσετε το ύψος του τριγώνου.



Προτεινόμενη Λύση

Αρχικά, υπολογίζουμε το εμβαδόν του τετραγώνου. Έχουμε ότι:

$$E_{\text{τετραγώνου}} = 9 \times 9 = 81 \text{ cm}^2$$

Ακολούθως, υπολογίζουμε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής, που αντιστοιχεί στα $\frac{2}{3}$ του εμβαδού του τετραγώνου.

Έχουμε ότι

$$E_{\text{σκιασμένης}} = 54 \text{ cm}^2,$$

αφού $81 \div 3 = 27$ και $2 \times 27 = 54$.

Τώρα, τα $\frac{3}{5}$ του εμβαδού του τριγώνου είναι ίσα με 54 cm^2 . Έτσι, το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσο με

$$E_{\text{τριγώνου}} = 90 \text{ cm}^2,$$

αφού $54 \div 3 = 18$ και $5 \times 18 = 90$.

Τελικά, έχουμε ότι:

$$E_{\text{τριγώνου}} = \frac{(\text{βάση}) \times (\text{ύψος})}{2} \Rightarrow 90 = \frac{10 \times (\text{ύψος})}{2} \Rightarrow (\text{ύψος}) = 18 \text{ cm}$$

Πρόβλημα 2

Ο Μάριος έχει 1000 κιλά πορτοκάλια και θα τα τοποθετήσει σε πέντε κιβώτια με τον εξής τρόπο:

- Στα κιβώτια Α και Β θα τοποθετηθούν συνολικά 430 κιλά πορτοκάλια.
- Στα κιβώτια Β και Γ θα τοποθετηθούν συνολικά 460 κιλά πορτοκάλια.
- Στα κιβώτια Γ και Δ θα τοποθετηθούν συνολικά 310 κιλά πορτοκάλια.
- Στα κιβώτια Δ και Ε θα τοποθετηθούν συνολικά 380 κιλά πορτοκάλια.

Πόσα κιλά πορτοκάλια θα τοποθετηθούν σε κάθε κιβώτιο;

Προτεινόμενη Λύση

Ο Μάριος έχει 1000 κιλά πορτοκάλια και θα τα τοποθετήσει σε πέντε κιβώτια. Επομένως:

$$A + B + \Gamma + \Delta + E = 1000$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε ότι:

$$A + B = 430$$

$$B + \Gamma = 460$$

$$\Gamma + \Delta = 310$$

$$\Delta + E = 380$$

Έτσι:

$$A = (A + B + \Gamma + \Delta + E) - (B + \Gamma) - (\Delta + E) = 1000 - 460 - 380 = 160$$

Δηλαδή, το κιβώτιο Α έχει 160 κιλά πορτοκάλια.

- Επειδή $A + B = 430$ και $A = 160$, τότε $B = 430 - 160 = 270$ κιλά πορτοκάλια.
- Επειδή $B + \Gamma = 460$ και $B = 270$, τότε $\Gamma = 460 - 270 = 190$ κιλά πορτοκάλια.
- Επειδή $\Gamma + \Delta = 310$ και $\Gamma = 190$, τότε $\Delta = 310 - 190 = 120$ κιλά πορτοκάλια.
- Επειδή $\Delta + E = 380$ και $\Delta = 120$, τότε $E = 380 - 120 = 260$ κιλά πορτοκάλια.

Πρόβλημα 3

Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί διαιρούνται και με το 3 και με το 11;

Προτεινόμενη Λύση

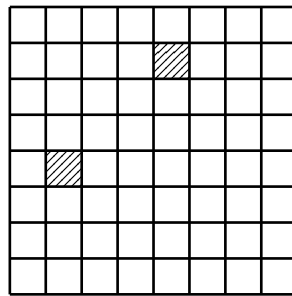
Παρατηρούμε ότι ένας αριθμός διαιρείται και με το 3 και με το 11, όταν είναι πολλαπλάσιο του 33.

- Ο μεγαλύτερος τέτοιος τετραψήφιος αριθμός είναι ο 9999, αφού $9999 = 303 \times 33$. Επομένως, μέχρι και τον αριθμό 9999, υπάρχουν 303 αριθμοί που διαιρούνται με τον αριθμό 33 (διψήφιοι, τριψήφιοι και τετραψήφιοι).
- Ο μεγαλύτερος τριψήφιος που διαιρείται με το 33 είναι ο 990, αφού $990 = 30 \times 33$. Επομένως, μέχρι και τον 990, υπάρχουν 30 αριθμοί που διαιρούνται με τον αριθμό 33 (διψήφιοι και τριψήφιοι).

Έτσι, οι τετραψήφιοι αριθμοί που διαιρούνται με τον αριθμό 33 είναι $303 - 30 = 273$.

Πρόβλημα 4

Στο πιο κάτω σχήμα, παρουσιάζεται ένα πλέγμα 8×8 , στο οποίο δύο τετραγωνάκια είναι σκιασμένα. Πόσα τετράγωνα οποιουδήποτε μεγέθους δεν περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι;



Προτεινόμενη Λύση

Έχουμε διαδοχικά ότι:

- Υπάρχουν 64 τετράγωνα μεγέθους 1×1 , εκ των οποίων τα 2 είναι σκιασμένα. Άρα, τα 62 είναι ασκίαστα.
- Υπάρχουν 49 τετράγωνα μεγέθους 2×2 , εκ των οποίων τα 8 περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι. Άρα, τα 41 δεν περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι.
- Υπάρχουν 36 τετράγωνα μεγέθους 3×3 , εκ των οποίων τα 12 περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι. Άρα, τα 24 δεν περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι.
- Υπάρχουν 25 τετράγωνα μεγέθους 4×4 , εκ των οποίων τα 15 περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι. Άρα, τα 10 δεν περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι.
- Υπάρχουν 16 τετράγωνα μεγέθους 5×5 , εκ των οποίων τα 12 περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι. Άρα, τα 4 δεν περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι.
- Υπάρχουν 9 τετράγωνα μεγέθους 6×6 , εκ των οποίων τα 8 περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι. Άρα το 1 δεν περιέχει σκιασμένο τετραγωνάκι.
- Δεν υπάρχουν τετράγωνα μεγέθους 7×7 ή 8×8 που να μην περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι.

Τελικά, υπάρχουν συνολικά $62 + 41 + 24 + 10 + 4 + 1 = 142$ τετράγωνα που δεν περιέχουν σκιασμένο τετραγωνάκι.