

Μπάμπης Γ. Τσιριόπουλος

ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Θεμέλιο


Μαθηματικών

Γνώσεων

- Βασική Θεωρία
- 700 + Θέματα από Εισαγωγικές Εξετάσεις σε Ιδιωτικά Γυμνάσια και στα Πρότυπα Πειραματικά Γυμνάσια
- Υποδειγματικές Λύσεις

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

50 υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις με στοιχεία μεθοδολογίας για τη λύση προβλημάτων ...

 **001.** Σε ένα διαγωνισμό χορού συμμετείχαν 105 άτομα. Τα $\frac{4}{7}$ αυτών ήταν από την Ελλάδα. Τα $\frac{2}{5}$ των υπολοίπων ήταν από την Κύπρο και οι υπόλοιποι ήταν από την Ιταλία και από την Ισπανία. Οι 8 άντρες χορευτές αποτελούσαν τα $\frac{4}{9}$ των Ισπανών χορευτών. Να βρείτε:

α. Πόσοι χορευτές ήταν από την Ελλάδα
β. Πόσοι χορευτές ήταν από την Κύπρο
γ. Πόσοι ήταν οι Ιταλοί χορευτές.

(Αμερικάνικο Κολέγιο ΑΝΑΤΟΛΙΑ)

ΛΥΣΗ

α. Για να βρούμε το κλασματικό μέρος ενός αριθμού, κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Από την Ελλάδα ήταν $105 \cdot \frac{4}{7} = 60$ χορευτές.

β. Οι υπόλοιποι ήταν $105 - 60 = 45$ χορευτές.

Από την Κύπρο ήταν $45 \cdot \frac{2}{5} = 18$ χορευτές.

γ. Από την Ιταλία και την Ισπανία ήταν:
 $105 - (60 + 18) = 105 - 78 = 27$ χορευτές.

Όταν γνωρίζουμε το κλασματικό μέρος ενός αριθμού και θέλουμε να βρούμε τον αριθμό, κάνουμε διαίρεση.

Οι Ισπανοί χορευτές ήταν $8 : \frac{4}{9} = 8 \cdot \frac{9}{4} = 18$.

Επίσης πολλές φορές κάνουμε **αναγωγή στην κλασματική μονάδα**.
Λέμε:

Τα $\frac{4}{9}$ των χορευτών είναι 8 χορευτές.

Το $\frac{1}{9}$ των χορευτών είναι $8 : 4 = 2$ χορευτές.

Τα $\frac{9}{9}$ των χορευτών είναι $2 \times 9 = 18$ χορευτές.

Επομένως οι Ισπανοί χορευτές ήταν 18.
Οι Ιταλοί χορευτές ήταν $27 - 18 = 9$.

☞ **002.** Όταν αλέθουμε το σιτάρι για να γίνει αλεύρι, το σιτάρι χάνει στο άλεσμα το 25 % του βάρους του. Στη συνέχεια, όταν ζυμώνουμε το αλεύρι για να γίνει ζυμάρι, το αλεύρι αυξάνει στο ζύωμα το βάρος του κατά 50 %. Τέλος, όταν ψήνουμε το ζυμάρι για να γίνει ψωμί, το ζυμάρι χάνει στο ψήσιμο το 20 % του βάρους του. Να βρείτε πόσα κιλά σιτάρι χρειαζόμαστε για να κάνουμε 240 κιλά ψωμί.
(Αμερικάνικο Κολέγιο ΑΝΑΤΟΛΙΑ)

ΛΥΣΗ

Όταν μας δίνεται **μείωση, έκπτωση κλπ, κατά ένα ποσοστό**, παίρνουμε το ποσοστό που έμεινε, αφαιρώντας από το 100 %.

Αντίστοιχα: Όταν μας δίνεται **αύξηση κατά ένα ποσοστό**, προσθέτουμε το ποσοστό στο 100 %. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγουμε την ενδιάμεση πράξη, με την οποία βρίσκουμε πόση είναι η μείωση ή η αύξηση, για να βρούμε στη συνέχεια την τελική τιμή.

Ακολουθούμε τα βήματα, αρχίζοντας από το τελευταίο δεδομένο.

Εφ' όσον το ζυμάρι χάνει 20 % κατά τη μετατροπή του σε ψωμί, μένει το:
 $100\% - 20\% = 80\%$ του βάρους του ζυμαριού.

- Για 240 κιλά ψωμί χρειαζόμαστε: $240 : \frac{80}{100} = 240 \cdot \frac{100}{80} = 300$ κιλά ζυμάρι.
- Για 300 κιλά ζυμάρι χρειαζόμαστε: $300 : \frac{150}{100} = 300 \cdot \frac{100}{150} = 200$ κιλά αλεύρι.
- Για 200 κιλά αλεύρι χρειαζόμαστε: $200 : \frac{75}{100} = 200 \cdot \frac{100}{75} = 266$ κιλά σιτάρι.

Μπορούμε στις περιπτώσεις αυτές να χρησιμοποιήσουμε τον **πίνακα ποσών – τιμών**.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
ζυμάρι	100 κ.	x; κ.
ψωμί	80 κ.	240 κ.

Τα ποσά είναι ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{100}{80} = \frac{x}{240}$$

$$80 \cdot x = 100 \cdot 240$$

$$80 \cdot x = 24.000$$

$$x = 24.000 : 80$$

$$x = 300$$

Την ίδια λογική χρησιμοποιούμε και για τη μετατροπή του αλευριού σε ζυμάρι, καθώς και του σιταριού σε αλεύρι.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την **απλή μέθοδο των τριών**.

Τα 100 κιλά ζυμάρι δίνουν 80 κιλά ψωμί


Τα x; κιλά ζυμάρι δίνουν 240 κιλά ψωμί

Τα ποσά είναι ανάλογα. Επομένως:

$$x = 100 \cdot \frac{240}{80} = 300 \text{ κιλά ζυμάρι.}$$

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

Την ίδια λογική χρησιμοποιούμε και για τη μετατροπή του αλευριού σε ζυμάρι, καθώς και του σιταριού σε αλεύρι.
Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της **αναγωγής στη μονάδα**.
Από τα 100 κιλά ζυμάρι παίρνουμε 80 κιλά ψωμί.
Επομένως $100 : 80 = 1,25$ κιλά ζυμάρι δίνουν 1 κιλό ψωμί.
Οπότε τα 240 κιλά ψωμί τα παίρνουμε από $240 \times 1,25 = 300$ κιλά αλεύρι.
Την ίδια λογική χρησιμοποιούμε και για τη μετατροπή του αλευριού σε ζυμάρι, καθώς και του σιταριού σε αλεύρι.

 **003.** Ένας ηλεκτρολόγος για να εγκαταστήσει μία κεραία τηλεόρασης, χρησιμοποίησε τα $\frac{5}{7}$ του καλωδίου που είχε αγοράσει και περίσσεψαν 8 μέτρα. Να βρείτε πόσα μέτρα χρησιμοποίησε για την κεραία.
(Αμερικάνικο Κολέγιο ΑΝΑΤΟΛΙΑ)

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε το κλασματικό μέρος του καλωδίου το οποίο αντιστοιχεί στα 8 μέτρα που περίσσεψαν, αφαιρώντας από τη μονάδα, αυτό που έχουμε.
Δηλαδή:

Περίσσεψαν τα $\frac{7}{7} - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$ του καλωδίου.

Στη συνέχεια κάνουμε διαίρεση.

Όλο το καλώδιο ήταν $8 : \frac{2}{7} = 8 \cdot \frac{7}{2} = 28$ μ.

Αν θέλουμε, μπορούμε να κάνουμε **αναγωγή στην κλασματική μονάδα**.

Λέμε:


Τα $\frac{2}{7}$ του καλωδίου είναι 8 μέτρα.

Το $\frac{1}{7}$ του καλωδίου είναι $8 : 2 = 4$ μέτρα.

Επομένως τα $\frac{7}{7}$ του καλωδίου, δηλαδή ολόκληρο το καλώδιο, είναι:

$7 \times 4 = 28$ μέτρα.

Επομένως για την κεραία χρησιμοποίησε $28 - 8 = 20$ μέτρα.

 **004.** Να μοιράσετε το ποσό των 7.350 ευρώ σε τρία μέρη, ανάλογα προς τους αριθμούς 36, 51 και 60.
(Εκπαιδευτήρια ΑΘΗΝΑ)

ΛΥΣΗ

Είναι ένα πρόβλημα μερισμού σε μέρη ανάλογα.

Ένας τρόπος επίλυσης.

$$36 + 51 + 60 = 147$$

$$7.350 : 147 = 50$$

Επομένως χωρίζουμε το ποσό των 7.350 ευρώ σε:

- $36 \times 50 = 1.800$ ευρώ
- $51 \times 50 = 2.550$ ευρώ
- $60 \times 50 = 3.000$ ευρώ

- ☞ **005.** Ένα ποσό 540 ευρώ μοιράστηκε σε δύο φίλους Α και Β ανάλογα με τις ηλικίες τους, που ήταν 12 και 15 έτη αντίστοιχα. Ο Α αύξησε το ποσό που πήρε κατά 20 % και ο Β ξόδεψε τα $\frac{3}{10}$ του δικού του. Τα χρήματα που έχουν τώρα και οι δύο μαζί τα μοίρασαν σε άπορες οικογένειες, δίνοντας σε κάθε μία το ίδιο ακέραιο ποσό μεταξύ 50 και 250 ευρώ.
- Να βρείτε το ποσό που πήρε ο Α και ο Β αρχικά.
 - Να βρείτε το ποσό που μοιράστηκε στις άπορες οικογένειες.
 - Να βρείτε όλες τις δυνατές περιπτώσεις της διανομής, δηλαδή πόσες οικογένειες μπορούν να βοηθηθούν και πόσα ευρώ θα πάρει η κάθε μία.
- (Εκπαιδευτήρια ΑΘΗΝΑ)

ΛΥΣΗ

i. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του **μερισμού σε μέρη ανάλογα**.
Το άθροισμα των ηλικιών των δύο φίλων είναι: $12 + 15 = 27$ έτη.
Επομένως σε κάθε έτος της ηλικίας τους αντιστοιχούν $540 : 27 = 20$ ευρώ.
Άρα ο πρώτος πήρε $12 \times 20 = 240$ ευρώ και ο δεύτερος πήρε $15 \times 20 = 300$ ευρώ.

ii. Μετά τις μεταβολές ο Α έχει $240 \cdot \frac{120}{100} = 288$ ευρώ και ο δεύτερος έχει:

$$300 \cdot \frac{7}{10} = 210 \text{ ευρώ}.$$

Το ποσό που μοιράστηκε στις άπορες οικογένειες ήταν:
 $288 + 210 = 498$ ευρώ.

Χρησιμοποιούμε τα **κριτήρια διαιρετότητας**.

Το 498 είναι πολλαπλάσιο του 2, του 3 και του 6. Επομένως πήραν:

- 2 οικογένειες από $498 : 2 = 249$ ευρώ
- 3 οικογένειες από $498 : 3 = 166$ ευρώ
- 6 οικογένειες από $498 : 6 = 83$ ευρώ.

- ☞ **006.** Σε έναν σύλλογο έγιναν επαναληπτικές εκλογές για να εκλεγούν δύο μέλη του διοικητικού συμβουλίου. Ο Νίκος πήρε το 60 % των ψήφων και η Ιωάννα τις υπόλοιπες ψήφους. Αν ο Νίκος εξελέγη με διαφορά 24 ψήφων από την Ιωάννα, πόσοι ήταν συνολικά αυτοί που ψήφισαν;
- (Αμερικάνικο Κολέγιο ΑΝΑΤΟΛΙΑ)

ΛΥΣΗ

Στις περιπτώσεις αυτές **βρίσκουμε το ποσοστό ή το κλασματικό μέρος ή το δεκαδικό μέρος, που αντιστοιχεί στη διαφορά που υπάρχει**.

Ο Νίκος πήρε το 60 % των ψήφων και η Ιωάννα πήρε το $100 \% - 60 \% = 40 \%$ των ψήφων.

Η διαφορά $60 \% - 40 \% = 20 \%$ αντιστοιχεί σε 24 ψήφους.

Στη συνέχεια κάνουμε **διαίρεση**. Αυτοί που ψήφισαν ήταν:

$$24 : \frac{20}{100} = 24 \cdot \frac{100}{20} = 120 \text{ άτομα.}$$

Μπορούμε επίσης να κάνουμε **αναγωγή στην κλασματική μονάδα**.

Το 20 % των ψήφων, δηλαδή το $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ των ψήφων είναι 24 ψήφοι.

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

Το 100 % των ψήφων, δηλαδή το $\frac{100}{100} = \frac{5}{5}$ των ψήφων είναι:

$$5 \times 24 = 120 \text{ ψήφοι.}$$

007. Ο πατέρας της Μαρίας της έδωσε χρήματα για τη σχολική εκδρομή της τάξης της. Η Μαρία έδωσε τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων για τη συμμετοχή της στην εκδρομή και το $\frac{1}{3}$ του υπολοίπου το ξόδεψε για να αγοράσει κουλούρια και παγωτό. Στο τέλος της περίσσεψαν 14 ευρώ. Πόσα χρήματα είχε δώσει στη Μαρία ο πατέρας της; **(Αμερικάνικο Κολέγιο ΑΝΑΤΟΛΙΑ)**

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε το κλασματικό μέρος που αντιστοιχεί στα 14 ευρώ που της περίσσεψαν.

Η Μαρία ξόδεψε τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων για τη συμμετοχή της στην εκδρομή.

Έμεινε το $1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ των χρημάτων.

Για κουλούρια και παγωτό ξόδεψε το $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ των χρημάτων.

Επομένως έμειναν $1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{12}\right) = 1 - \left(\frac{9}{12} + \frac{1}{12}\right) = \frac{12}{12} - \frac{10}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ των χρημάτων.

Άρα ο πατέρας της έδωσε στη Μαρία $14 : \frac{1}{6} = 14 \cdot \frac{6}{1} = 84$ ευρώ.

008. Ένα φορτηγό και ένα ταξί διανύουν μία σταθερή απόσταση. Κάθε ρόδα του φορτηγού έχει ακτίνα 52 cm , ενώ κάθε ρόδα του ταξί έχει περίμετρο 2 m . Αν οι ρόδες του φορτηγού κάνουν 4.000 στροφές για να διανύσουν την απόσταση, πόσες στροφές κάνουν οι ρόδες του ταξί για να διανύσουν την ίδια απόσταση; **(Εκπαιδευτήρια ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΠΑΥΛΟΣ)**

ΛΥΣΗ

Όταν μας δίνεται η ακτίνα ή η διάμετρος της ρόδας ενός τροχοφόρου και οι στροφές που κάνει η ρόδα και ζητούν να βρούμε την απόσταση που διανύει το κινητό, βρίσκουμε το μήκος της ρόδας και πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμό των στροφών. Ο τύπος που δίνει το μήκος του κύκλου

είναι:
$$\begin{cases} \Gamma = 2 \cdot \pi \cdot \rho \\ \text{ή} \\ \Gamma = \pi \cdot \delta \end{cases}$$
, όπου ρ η ακτίνα, δ η διάμετρος του κύκλου και $\pi = 3,14$.

Γνωρίζοντας δύο από τα στοιχεία: μήκος ρόδας, ακτίνα ή διάμετρος και απόσταση που διανύει το κινητό, μπορούμε να βρούμε το τρίτο.

Κάθε ρόδα του φορτηγού έχει περίμετρο: $\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot \rho = 2 \cdot 3,14 \cdot 52 = 326,56 \text{ cm}$.

Επομένως, όταν κάνει 4.000 στροφές, καλύπτει απόσταση:

$$326,56 \cdot 4.000 = 1.306.240 \text{ cm}$$

Η περίμετρος κάθε ρόδας του ταξί είναι $2 \text{ m} = 2 \cdot 100 \text{ cm} = 200 \text{ cm}$.

Οι ρόδες του ταξί κάνουν $1.306.240 : 200 = 6.531$ στροφές περίπου.

☞ **009.** Το $\frac{1}{6}$ των μαθητών μιας τάξης έχουν βαθμό από 18,5 έως 20,

δηλαδή είναι άριστοι μαθητές. Τα $\frac{4}{15}$ είναι πολύ καλοί μαθητές

(πάνω από 16,5), τα $\frac{2}{5}$ είναι καλοί (βαθμοί 12,56 – 15,5), ενώ οι υπόλοιποι

είναι μέτριοι. Να βρεθεί πόσοι είναι οι μέτριοι, αν οι άριστοι είναι 5.

(Εκπαιδευτήρια ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΠΑΥΛΟΣ)

ΛΥΣΗ

Όλοι μαζί οι μαθητές της τάξης είναι: $5 : \frac{1}{6} = 5 \cdot \frac{6}{1} = 30$.

Οι μέτριοι μαθητές αποτελούν το:

$$1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{15} + \frac{2}{5} \right) = 1 - \left(\frac{5}{30} + \frac{8}{30} + \frac{12}{30} \right) = \frac{30}{30} - \frac{25}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \text{ των μαθητών της τάξης.}$$

Οι μέτριοι μαθητές είναι $30 \cdot \frac{1}{6} = 5$.

☞ **010.** Σε μια πολύτεκνη οικογένεια οι γονείς αγόρασαν για τα παιδιά τους στην αρχή της σχολικής χρονιάς 32 τετράδια, 28 μολύβια και 12 σβήστρες.

Αν κάθε παιδί πήρε τον ίδιο αριθμό από κάθε σχολικό είδος, να βρείτε:

α. Πόσα παιδιά έχει η πολύτεκνη οικογένεια.

β. Πόσα τετράδια, πόσα μολύβια και πόσες σβήστρες πήρε το κάθε παιδί.

(Εκπαιδευτήρια ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΠΑΥΛΟΣ)

ΛΥΣΗ


α. Είναι: Μ.Κ.Δ. (32, 28, 12) = 4.

Επομένως η οικογένεια έχει 4 παιδιά.

β. Το κάθε παιδί πήρε:

- $32 : 4 = 8$ τετράδια
- $28 : 4 = 7$ μολύβια
- $12 : 4 = 3$ σβήστρες

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

 **011.** Μια δεξαμενή ήταν γεμάτη νερό. Από αυτό καταναλώθηκαν τα $\frac{3}{5}$ τη Δευτέρα. Την επόμενη μέρα, καταναλώθηκε το $\frac{1}{4}$ της ποσότητας που είχε μείνει από την πρώτη μέρα και έμειναν 90 λίτρα. Πόσο νερό είχε αρχικά η δεξαμενή;
(Εκπαιδευτήρια ΔΕΛΑΣΑΛ)

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

- Τη Δευτέρα καταναλώθηκαν τα $\frac{3}{5}$ της ποσότητας του νερού.
- Έμειναν: $\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ της ποσότητας.
- Την Τρίτη καταναλώθηκε το: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ της ποσότητας του νερού.
- Έμειναν: $1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{10}{10} - \left(\frac{6}{10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ της ποσότητας.


Επομένως η αρχική ποσότητα ήταν $90 : \frac{3}{10} = 90 \cdot \frac{10}{3} = 300$ λίτρα.

Άλλος τρόπος για να βρούμε την αρχική ποσότητα του νερού είναι με την **αναγωγή στην κλασματική μονάδα**.

Τα $\frac{3}{10}$ του νερού είναι 90 λίτρα.

Επομένως το $\frac{1}{10}$ του νερού είναι $90 : 3 = 30$ λίτρα.

Άρα τα $\frac{10}{10}$ του νερού είναι $10 \times 30 = 300$ λίτρα.

 **012.** Δύο ελαιοχρωματιστές έβαψαν ένα σπίτι και πληρώθηκαν συνολικά 1.590 ευρώ. Όμως, ο πρώτος εργάτης εργάστηκε 9 ημέρες και ο δεύτερος μόλις 6 ημέρες. Πόσα χρήματα θα πάρει ο καθένας;
(Εκπαιδευτήρια ΔΕΛΑΣΑΛ)

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε τα ημερομίσθια και στη συνέχεια βρίσκουμε τα χρήματα που πληρώθηκαν για κάθε ημερομίσθιο.

Οι δύο ελαιοχρωματιστές εργάστηκαν συνολικά $9 + 6 = 15$ ημέρες.

Επομένως για κάθε ημέρα εργασίας πήραν $1.590 : 15 = 106$ ευρώ.

Άρα ο πρώτος πήρε $9 \times 106 = 954$ ευρώ και ο δεύτερος πήρε:

$6 \times 106 = 636$ ευρώ.

☞ **013.** Τα $\frac{3}{4}$ της παραγωγής εσπεριδοειδών σ' ένα κτήμα είναι πορτοκάλια.

Τα πορτοκάλια είναι 25 κιλά περισσότερα από τα λεμόνια. Πόσα κιλά εσπεριδοειδή συγκέντρωσε συνολικά ο παραγωγός;

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ "Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ"

ΛΥΣΗ

Τα $\frac{3}{4}$ της παραγωγής είναι πορτοκάλια, που σημαίνει ότι τα λεμόνια είναι

το $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ της παραγωγής.

Η διαφορά είναι $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ της παραγωγής, που αντιστοιχεί σε 25 κιλά.

Επομένως η παραγωγή είναι συνολικά: $25 : \frac{1}{2} = 25 \cdot \frac{2}{1} = 50$ κιλά.

☞ **014.** Οι 6 τεχνίτες τελειώνουν ένα έργο σε 24 ημέρες. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσει το ίδιο έργο, αν 2 ημέρες αφ' ότου ξεκίνησε, προσλήφθηκαν 5 τεχνίτες ακόμα;

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ "Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ"

ΛΥΣΗ

Θα βρούμε πρώτα πόσα μεροκάματα θα κάνουν και οι 6 τεχνίτες μαζί.

Οι 6 τεχνίτες θα κάνουν $6 \times 24 = 144$ μεροκάματα.

Σε 2 μέρες οι 6 τεχνίτες έκαναν $6 \times 2 = 12$ μεροκάματα.

Επομένως έμειναν $144 - 12 = 132$ μεροκάματα ακόμα για τους

$6 + 5 = 11$ τεχνίτες. Άρα θα κάνουν $132 : 11 = 12$ ημέρες ακόμα.

Συνολικά το έργο θα τελειώσει σε $2 + 12 = 14$ ημέρες.

☞ **015.** Η γιαγιά έφερε δώρο στα εγγόνια της από το χωριό ένα γυάλινο βάζο με μέλι που ζυγίζει 1.140 γραμμάρια. Η οικογένεια κατανάλωσε το $\frac{1}{4}$ της

ποσότητας του μελιού. Το βάζο με το υπόλοιπο μέλι ζυγίζει τώρα 890 γραμμάρια. Πόσο ζυγίζει άδειο το γυάλινο βάζο;

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ "Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ"

ΛΥΣΗ

Θα βρούμε πρώτα το καθαρό βάρος του μελιού.

Το $\frac{1}{4}$ της ποσότητας του αντιστοιχεί σε: $1.140 - 890 = 250$ γραμμάρια.

Επομένως το καθαρό βάρος του μελιού ήταν:

$250 : \frac{1}{4} = 250 \cdot 4 = 1.000$ γραμμάρια.

Από το μικτό βάρος θα αφαιρέσουμε το καθαρό βάρος, για να βρούμε το απόβαρο. Το γυάλινο βάζο άδειο, ζυγίζει: $1.140 - 1.000 = 140$ γραμμάρια.

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

- ☞ **016.** Τρεις εργάτες πληρώθηκαν για ένα έργο 900 ευρώ και εργάστηκαν:
- ❖ Ο α΄ εργάτης 4 ημέρες από 6 ώρες την ημέρα
 - ❖ Ο β΄ εργάτης 6 ημέρες από 5 ώρες την ημέρα
 - ❖ Ο γ΄ εργάτης 6 ημέρες από 6 ώρες την ημέρα
- Πόση είναι η αμοιβή του καθενός;

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ “Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ”

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε πρώτα πόσες ώρες εργάστηκε ο καθένας και στη συνέχεια βρίσκουμε πόσες ώρες εργάστηκαν και οι τρεις μαζί.

Έχουμε:

- ❖ Ο α΄ εργάτης εργάστηκε $4 \times 6 = 24$ ώρες
- ❖ Ο β΄ εργάτης εργάστηκε $6 \times 5 = 30$ ώρες
- ❖ Ο γ΄ εργάτης εργάστηκε $6 \times 6 = 36$ ώρες

Συνολικά και οι τρεις μαζί εργάστηκαν: $24 + 30 + 36 = 90$ ώρες.

Βρίσκουμε στη συνέχεια το ωρομίσθιό τους.

Το ωρομίσθιο ήταν $900 : 90 = 10$ ευρώ.

Τέλος βρίσκουμε πόσα χρήματα πήρε ο κάθε ένας από τους τρεις εργάτες.

Έτσι:

- Ο α΄ εργάτης πήρε $24 \times 10 = 240$ ευρώ
- Ο β΄ εργάτης πήρε $30 \times 10 = 300$ ευρώ
- Ο γ΄ εργάτης πήρε $36 \times 10 = 360$ ευρώ

- ☞ **017.** Ένας εργάτης τελειώνει ένα έργο σε 24 ημέρες.

Το ίδιο έργο ένας άλλος εργάτης το τελειώνει σε 30 ημέρες και ένας τρίτος εργάτης το τελειώνει σε 20 ημέρες.

α. Τι μέρος του έργου τελειώνει ο κάθε εργάτης σε μία ημέρα;

β. Αν εργαστούν συγχρόνως και οι τρεις εργάτες, σε πόσες ημέρες θα τελειώσουν το έργο;

γ. Αν εργαστούν 5 ημέρες και οι τρεις συγχρόνως, τι μέρος του έργου θα έχουν τελειώσει;

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ “Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ”

ΛΥΣΗ

α. Εφ' όσον ο πρώτος εργάτης τελειώνει το έργο σε 24 ημέρες, σε μία

ημέρα τελειώνει το $\frac{1}{24}$ του έργου.

Ο δεύτερος εργάτης τελειώνει σε μία ημέρα το $\frac{1}{30}$ του έργου.

Ο τρίτος εργάτης τελειώνει σε μία ημέρα το $\frac{1}{20}$ του έργου.

β. Βρίσκουμε τι μέρος του έργου τελειώνουν οι τρεις εργάτες σε μία ημέρα.

Αν εργαστούν συγχρόνως και οι τρεις εργάτες, τελειώνουν σε μία ημέρα το:

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{5}{120} + \frac{4}{120} + \frac{6}{120} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8} \text{ του έργου.}$$

Επομένως τελειώνουν το έργο σε 8 ημέρες.

γ. Αν εργαστούν 5 ημέρες και οι τρεις συγχρόνως, θα τελειώσουν τα:

$$5 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \text{ του έργου.}$$

☞ **318.** Τρία αδέρφια μοιράζονται εξίσου μια κληρονομιά, που είναι ένα χωράφι και ένα διαμέρισμα.

- Ο 1^{ος} παίρνει το χωράφι και 600 ευρώ
- Ο 2^{ος} παίρνει το διαμέρισμα, αλλά δίνει στον 1^ο αδερφό 600 ευρώ και στον 3^ο αδερφό 15.000 ευρώ.

α. Ποια είναι η αξία του χωραφιού;

β. Ποια είναι η αξία του διαμερίσματος;

γ. Αν για την ακίνητη περιουσία υπάρχει φόρος 3% για την αξία που αντιστοιχεί σε ποσό χρημάτων πάνω από 6.000 €, πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά στην εφορία ο 1^{ος} και ο 2^{ος} αδερφός;

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΚΟΛΕΓΙΟ

ΛΥΣΗ

Ο 3^{ος} αδερφός πήρε 15.000 ευρώ και τίποτε άλλο. Επομένως το κάθε παιδί πήρε 15.000 ευρώ. Έτσι:

α. Η αξία του χωραφιού ήταν $15.000 - 600 = 14.400$ ευρώ.

β. Η αξία του διαμερίσματος ήταν $15.000 + (15.000 + 600) = 15.000 + 15.600 = 30.600$ ευρώ.

γ. Ο 1^{ος} αδερφός πλήρωσε φόρο για $14.400 - 6.000 = 8.400$ ευρώ.

Πλήρωσε δηλαδή: $8.400 \cdot \frac{3}{100} = 252$ ευρώ.

☞ **019.** Ένας πωλητής του καταστήματος “Clothes4All” χρειάζεται τη βοήθειά μας για να υπολογίσει την τελική τιμή μιας μπλούζας.

Η μπλούζα έχει αρχική τιμή (χωρίς Φ.Π.Α.) 60 ευρώ. Στη συνέχεια ο πωλητής υπολογίζει την τιμή με Φ.Π.Α. (25 %). Η τελική τιμή υπολογίζεται με έκπτωση 25 % επί της τιμής με Φ.Π.Α. Η τελική τιμή της μπλούζας είναι 60 ευρώ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΠΑΝΟΥ)

ΛΥΣΗ

Ο Φ.Π.Α. είναι ο Φόρος Προστιθέμενης Αξίας, δηλαδή ο Φόρος που προστίθεται στην Αξία του προϊόντος, τον εισπράττει αυτός που πουλά προϊόντα

ή προσφέρει υπηρεσίες και τον αποδίδει στο Κράτος.

Έχουμε:

- Αρχική τιμή: 60 ευρώ.
- Τιμή με Φ.Π.Α.: $60 \cdot \frac{125}{100} = 75$ ευρώ.
- Τιμή μετά την έκπτωση: $75 \cdot \frac{75}{100} = 56,25$ ευρώ.

Η τελική τιμή της μπλούζας δεν είναι 60 ευρώ.

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

- ☞ **020.** Κατά την περίοδο των εκπτώσεων τρία καταστήματα με τα ίδια προϊόντα έκαναν εκπτώσεις.
- Το κατάστημα Α έκανε έκπτωση 10 % και στη συνέχεια έκπτωση 5 %.
 - Το κατάστημα Β έκανε έκπτωση 15 %.
 - Το κατάστημα Γ έκανε έκπτωση 30% και στη συνέχεια ανέβασε τις τιμές κατά 15 %.

Να βρείτε ποιο κατάστημα θα έχει τις μικρότερες τελικές τιμές στα προϊόντα του ή αν όλα τα καταστήματα θα έχουν την ίδια τελική τιμή.

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΠΑΝΟΥ)

ΛΥΣΗ

Το κατάστημα Α έκανε έκπτωση 10 %. Δηλαδή πουλούσε τα προϊόντα του με $\frac{90}{100}$ της αρχικής τιμής. Στη συνέχεια έκανε έκπτωση 5 %.

Δηλαδή πουλούσε τα προϊόντα του με $\frac{90}{100} \cdot \frac{95}{100} = 85,5\%$ της αρχικής τιμής.

Το κατάστημα Β έκανε έκπτωση 15 %. Δηλαδή πουλούσε τα προϊόντα του με $\frac{85}{100} = 85\%$ της αρχικής τιμής.

Το κατάστημα Γ έκανε έκπτωση 30 %. Δηλαδή πουλούσε τα προϊόντα του με $\frac{70}{100}$ της αρχικής τιμής. Στη συνέχεια ανέβασε τις τιμές κατά 15 %.

Δηλαδή πουλούσε τα προϊόντα του με $\frac{70}{100} \cdot \frac{115}{100} = 80,5\%$ της αρχικής τιμής.

Τελικά τις μικρότερες τιμές τις έχει το κατάστημα Γ.

- ☞ **021.** Τρεις οικογένειες προμηθεύτηκαν από το ίδιο κατάστημα καλοκαιρινές μπλούζες και παντελόνια ίδιας μάρκας και ποιότητας, για όλα τα παιδιά τους. Η πρώτη οικογένεια για 6 μπλούζες και 8 παντελόνια πλήρωσε 308 ευρώ και η δεύτερη οικογένεια για 10 μπλούζες και 12 παντελόνια πλήρωσε 480 ευρώ. Πόσα πλήρωσε η τρίτη οικογένεια που αγόρασε 12 μπλούζες και 15 παντελόνια;

ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ *Jeanne D' Arc*

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

(10 μπλούζες και 12 παντελόνια) μείον (6 μπλούζες και 8 παντελόνια)
κοστίζουν $480 - 308 = 172$ ευρώ.

Επομένως 4 μπλούζες και 4 παντελόνια κοστίζουν 172 ευρώ.

Άρα 1 μπλούζα και 1 παντελόνι κοστίζουν $172 : 4 = 43$ ευρώ.

Τέλος 10 μπλούζες και 10 παντελόνια κοστίζουν $43 \times 10 = 430$ ευρώ.

Έχουμε:

(10 μπλούζες και 12 παντελόνια) μείον (10 μπλούζες και 10 παντελόνια)
κοστίζουν $480 - 430 = 50$ ευρώ.

Άρα 2 παντελόνια κοστίζουν 50 ευρώ, που σημαίνει ότι το 1 παντελόνι κοστίζει $50 : 2 = 25$ ευρώ.

Επειδή 1 μπλούζα και 1 παντελόνι κοστίζουν 43 ευρώ, η 1 μπλούζα κοστίζει $43 - 25 = 18$ ευρώ.

☞ **022.** Τρεις φίλοι αγρότες που έχουν τρία γειτονικά κτήματα με ελαιόδεντρα συμφώνησαν να μαζέψουν μαζί τις ελιές τους. Όταν τελείωσαν ζύγισε ο καθένας τις ελιές του, στη συνέχεια τις ανακάτεψαν και τις μετέφεραν στο ελαιοτριβείο. Το συνολικό λάδι που έβγαλαν ήταν 1.000 κιλά. Αν οι ελιές του ενός αγρότη ήταν 1.750 κιλά, του δεύτερου ήταν 2.500 κιλά και του τρίτου ήταν 750 κιλά, πόσα κιλά λάδι πήρε ο καθένας;
(ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΚΑΛΑΜΑΡΙ)

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε πόσα κιλά ήταν η παραγωγή.

Οι ελιές ήταν $1.750 + 2.500 + 750 = 5.000$ κιλά.

Επομένως η συμμετοχή του καθενός στο σύνολο της παραγωγής ήταν:

- του πρώτου $\frac{1.750}{5.000} = 0,35 = 35\%$
- του δεύτερου $\frac{2.500}{5.000} = 0,50 = 50\%$
- του τρίτου $\frac{750}{5.000} = 0,15 = 15\%$

Επομένως αντίστοιχη είναι και η συμμετοχή του καθενός στο μείρασμα του λαδιού. Άρα θα πάρουν:

- ο πρώτος $1.000 \cdot \frac{35}{100} = 350$ κιλά λάδι
- ο δεύτερος $1.000 \cdot \frac{50}{100} = 500$ κιλά λάδι
- ο πρώτος $1.000 \cdot \frac{15}{100} = 150$ κιλά λάδι.

☞ **023.** Ένα συνεργείο, αποτελούμενο από 18 εργάτες, ανέλαβε την κατασκευή ενός έργου και υποσχέθηκε να το παραδώσει σε 25 μέρες. Στις 15 πρώτες μέρες το συνεργείο κατάφερε να ολοκληρώσει ένα μέρος του έργου, αλλά ο εργολάβος ζήτησε να τελειώσει το έργο μια μέρα νωρίτερα. Βρείτε πόσοι εργάτες πρέπει να προστεθούν στο συνεργείο έτσι, ώστε το έργο να τελειώσει την ημερομηνία που ζήτησε ο εργολάβος.

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΜΠΟΥΓΑ)

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε πρώτα πόσα μεροκάματα χρειαζόντουσαν για την κατασκευή του έργου. Ήταν: $18 \times 25 = 450$ μεροκάματα.

Στις 15 πρώτες μέρες πραγματοποιήθηκαν $18 \times 15 = 270$ μεροκάματα.

Επομένως θα χρειαζόντουσαν άλλα $450 - 270 = 180$ μεροκάματα.

Οι ημέρες που έμειναν για να ολοκληρωθεί το έργο ήταν $25 - 15 = 10$.

Ο εργολάβος όμως ζήτησε να τελειώσει το έργο μια μέρα νωρίτερα.

Άρα έμειναν $10 - 1 = 9$ μέρες ακόμα.

Επομένως δούλεψαν $180 : 9 = 20$ εργάτες, δηλαδή προστέθηκαν

$20 - 18 = 2$ εργάτες ακόμα.

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

☞ **024.** Σε ένα στρατιωτικό φυλάκιο υπηρετούν 15 στρατιώτες και έχουν τροφή για 20 ημέρες. Από αυτούς απολύθηκαν οι 3. Πόσες ημέρες παραπάνω θα περάσουν οι υπόλοιποι με τα ίδια τρόφιμα;

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΜΠΟΥΓΑ)

ΛΥΣΗ

Οι 15 στρατιώτες έχουν $15 \times 20 = 300$ μερίδες τροφής.
Μετά την απόλυση των 3 στρατιωτών έμεινα $15 - 3 = 12$ στρατιώτες.
Αυτοί θα περάσουν $300 : 12 = 25$ ημέρες.
Δηλαδή θα περάσουν $25 - 20 = 5$ ημέρες περισσότερες.

☞ **025.** Τρεις αθλητές ξεκινούν από το ίδιο σημείο ταυτόχρονα και τρέχουν στο στάδιο. Ο πρώτος ολοκληρώνει τον γύρο σε 2 λεπτά, ο δεύτερος σε 3 και ο τρίτος σε 4 λεπτά.

A. Πότε θα βρεθούν για δεύτερη φορά όλοι στο ίδιο σημείο ταυτόχρονα και πόσους γύρους θα έχει κάνει ο καθένας τους; (ως πρώτη φορά που συναντιούνται θεωρήστε την φορά που βρίσκονται οι αθλητές μετά την έναρξη του τρεξίματος από την αφετηρία)

B. Όταν συναντιούνται ταυτόχρονα για δεύτερη φορά οι τρεις αθλητές, ο τρίτος σταματάει και κάνει ένα διάλειμμα 2 λεπτών και μετά συνέχισε να τρέχει με τον ίδιο ρυθμό όπως και πριν. Πότε θα βρεθούν και πάλι ταυτόχρονα και οι 3 αθλητές;

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΜΠΟΥΓΑ)

ΛΥΣΗ

A. Είναι Ε.Κ.Π. (2, 3, 4) = 12. Επομένως θα βρεθούν για δεύτερη φορά όλοι στο ίδιο σημείο ταυτόχρονα μετά από 12 λεπτά.

Θα έχουν κάνει:

- Ο πρώτος αθλητής $12 : 2 = 6$ γύρους
- Ο δεύτερος αθλητής $12 : 3 = 4$ γύρους
- Ο τρίτος αθλητής $12 : 4 = 3$ γύρους.

B. Για δεύτερη φορά θα συναντηθούν μετά από $2 \times 12 = 24$ λεπτά, ενώ για τρίτη φορά θα συναντηθούν μετά από $3 \times 12 = 36$ λεπτά.

Ο πρώτος και ο δεύτερος θα κάνουν 12 λεπτά, ενώ ο τρίτος θα κάνει $36 - (24 + 2) = 36 - 26 = 10$ λεπτά.

☞ **026.** Ρώτησαν ένα βοσκό πόσα πρόβατα έχει και εκείνος απάντησε: “Έχω περισσότερα από 700 και λιγότερα από 800 και αν τα μετρήσω ανά 8, ανά 12 και ανά 15 μένει πάντα υπόλοιπο 7”.

Να βρείτε πόσα πρόβατα είχε ο βοσκός.

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΜΠΟΥΓΑ)

ΛΥΣΗ

Είναι Ε.Κ.Π.(8, 12, 15) = 120.

Πολλαπλάσιο του 120 μεταξύ του 700 και του 800 είναι μόνο το 720.

Επομένως ο βοσκός είχε $720 + 7 = 727$ πρόβατα.

☞ **027.** Η τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$K = \frac{1.001 \cdot 1.001 - 1.001}{1.000 \cdot 1.000 + 1.000} \text{ είναι ίση με:}$$

A. 0 **B.** 1.001 **Γ.** 1 **Δ.** άλλο

(PIERCE)

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζουμε το **αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας**.

Έχουμε:

$$\text{Επιμεριστική ιδιότητα: } \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

$$\text{Αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας: } \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$$

$$\text{Είναι: } K = \frac{1.001 \cdot 1.001 - 1.001}{1.000 \cdot 1.000 + 1.000} = \frac{1.001 \cdot (1.001 - 1)}{1.000 \cdot (1.000 + 1)} = \frac{1.001 \cdot 1.000}{1.000 \cdot 1.001} = 1.$$

☞ **028.** Η γιαγιά έψησε κάστανα στο τζάκι και θέλει να τα μοιράσει στα τρία εγγόνια της, Νικόλα, Κωνσταντίνα και Αναστάση. Λέει: “Νικόλα θα πάρεις

το $\frac{1}{5}$ από τα κάστανα που έψησα, ενώ μετά εσύ Κωνσταντίνα θα πάρεις

τα $\frac{2}{3}$ από τα κάστανα που απέμειναν”. Αφού πήραν ο Νικόλας και η Κωνσταντίνα τα

κάστανά τους, έμειναν τόσα κάστανα για τον Αναστάση, όσο είναι το μικρότερο διψήφιο πολλαπλάσιο του αριθμού 4. Να βρείτε πόσα κάστανα είχε ψήσει συνολικά η γιαγιά.

(PIERCE)

ΛΥΣΗ

Ο Νικόλας πήρε το $\frac{1}{5}$ από τα κάστανα που έψησε η γιαγιά.

Έμειναν τα $\frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ από τα κάστανα που έψησε η γιαγιά.

Η Κωνσταντίνα πήρε τα $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ από τα ψημένα κάστανα.

Έμειναν τα $1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{15}\right) = 1 - \left(\frac{3}{15} + \frac{8}{15}\right) = \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$ από τα κάστανα που έψησε η

γιαγιά. Αυτά αντιστοιχούν σε 12 κάστανα, που είναι το μικρότερο διψήφιο

πολλαπλάσιο του 4. Επομένως η γιαγιά έψησε: $12 : \frac{4}{15} = 12 \cdot \frac{15}{4} = 45$ κάστανα.

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

☞ **029.** Στο κυλικείο του PIERCE ο Δημήτρης αγόρασε ένα κρουασάν και μία τυρόπιτα και πλήρωσε 5 ευρώ. Η Μαρία αγόρασε ένα κρουασάν και δύο πορτοκαλάδες και πλήρωσε 7 ευρώ. Ο Γιάννης αγόρασε μία τυρόπιτα, ένα κρουασάν και δύο πορτοκαλάδες και πλήρωσε 9 ευρώ. Πόσα ευρώ κοστίζει το ένα κρουασάν;

A. 2 B. 3 Γ. 4 Δ. 1 E. 6

(PIERCE)

ΛΥΣΗ

Ο Γιάννης πλήρωσε 9 ευρώ για 1 κρουασάν και 2 πορτοκαλάδες.

Όμως 1 κρουασάν και 1 τυρόπιτα κοστίζουν 5 ευρώ.

Επομένως οι 2 πορτοκαλάδες κοστίζουν $9 - 5 = 4$ ευρώ.

Η Μαρία αγόρασε 1 κρουασάν και 2 πορτοκαλάδες και πλήρωσε 7 ευρώ.

Επομένως το 1 κρουασάν κοστίζει $7 - 4 = 3$ ευρώ.

☞ **030.** Ένα τεστ Μαθηματικών είχε δέκα ερωτήσεις. Ο Στέφανος απάντησε σε όλες τις ερωτήσεις και πήρε βαθμό 14. Αν για κάθε σωστή απάντηση πήρε 2 μονάδες και για κάθε λανθασμένη απάντηση τού αφαιρέθηκε μία μονάδα, σε πόσες ερωτήσεις η απάντηση ήταν λανθασμένη;

A. 4 B. 5 Γ. 8 Δ. 6 E. 2

(PIERCE)

ΛΥΣΗ

Αν ο Στέφανος απαντούσε σωστά και στις 10 ερωτήσεις, θα συγκέντρωνε $2 \times 10 = 20$ βαθμούς.

Η διαφορά των $20 - 14 = 6$ βαθμών, οφείλεται στις λανθασμένες απαντήσεις.

Δηλαδή είναι οι 2 μονάδες που θα έπαιρνε, αν απαντούσε σωστά

και η 1 μονάδα που του αφαιρέθηκε για κάθε λανθασμένη απάντηση.

Συνολικά $2 + 1 = 3$ μονάδες. Άρα δεν απάντησε σωστά σε $6 : 3 = 2$ ερωτήσεις.

☞ **031.** Ο κ. Γιώργος έφερε ένα κουτί με καραμέλες, για να κεράσει τους μαθητές της τάξης του. Αν δώσει 6 καραμέλες σε κάθε μαθητή, τότε δεν περισσεύει καμία καραμέλα. Αν δώσει 4 καραμέλες σε κάθε μαθητή, τότε περισσεύουν 40 καραμέλες.

α. Πόσους μαθητές έχει η τάξη;

β. Πόσες καραμέλες έχει το κουτί του κ. Γιώργου;

(PIERCE)

ΛΥΣΗ

α. Ο ζητούμενος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 6, γιατί αν δώσει 6 καραμέλες σε κάθε μαθητή, τότε δεν περισσεύει καμία καραμέλα.

Επίσης είναι και πολλαπλάσιο του 4, γιατί αν δώσει 4 καραμέλες σε κάθε μαθητή, τότε περισσεύουν 40 καραμέλες, που είναι και αυτό πολλαπλάσιο του 4. Είναι Ε.Κ.Π. $(6, 4) = 24$. Επομένως η τάξη έχει 24 μαθητές.

β. Οι καραμέλες ήταν $24 \times 6 = 144$.

☞ **032.** Οι παίκτες μιας ποδοσφαιρικής ομάδας, για κάθε αγώνα που νικάει η ομάδα, μοιράζονται 6.000 ευρώ και, για κάθε αγώνα που δε νικάει η ομάδα, πληρώνουν στον ιδιοκτήτη της ομάδας όλοι μαζί 1.500 ευρώ. Μετά από τριάντα αγώνες, δεν πήραν καθόλου χρήματα.

Σε πόσους αγώνες δε νίκησαν;

A. 6 B. 22 Γ. 18 Δ. 20 E. 24

(PIERCE)

ΛΥΣΗ

Είναι $6.000 : 1.500 = 4$. Επομένως οι αγώνες που δεν νίκησαν είναι τετραπλάσιοι από τους αγώνες που νίκησαν (γιατί στο τέλος δεν πήραν καθόλου χρήματα).

Έστω 1 μερίδιο για τους νικηφόρους αγώνες και 4 μερίδια για τις ήττες.

Έχουμε $1 + 4 = 5$ μερίδια, οπότε οι αγώνες που νίκησαν είναι $30 : 5 = 6$ και οι αγώνες που δεν νίκησαν είναι $4 \times 6 = 24$.

☞ **033.** Σε ένα Γυμνάσιο το 40% των μαθητών φοιτά στην Α' τάξη. Ο αριθμός των μαθητών της Β' τάξης είναι τριπλάσιος από τον αριθμό των μαθητών της Γ' τάξης και οι μαθητές της Α' τάξης είναι κατά 50 περισσότεροι από τους μαθητές της Γ' τάξης. Πόσοι μαθητές φοιτούν στην κάθε τάξη αυτού του Γυμνασίου; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

(ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ SAINT JOZEPH)

ΛΥΣΗ

Στην Α' τάξη φοιτά το 40 % των μαθητών.

Στη Β' και στη Γ' τάξη φοιτά το $100 \% - 40 \% = 60 \%$ του συνόλου των μαθητών.

Ο αριθμός των μαθητών της Β' τάξης είναι τριπλάσιος από τον αριθμό των μαθητών της Γ' τάξης.

Έστω 1 μερίδιο οι μαθητές της Γ' τάξης και 3 μερίδια οι μαθητές της Β' τάξης.

Τα μερίδια είναι: $1 + 3 = 4$.

Επομένως οι μαθητές της Γ' αποτελούν το $60 \% : 4 = 15 \%$ του συνόλου των μαθητών του σχολείου και οι μαθητές της Β' τάξης αποτελούν το $3 \times 15 \% = 45 \%$ του συνόλου των μαθητών του σχολείου.

Έχουμε $40 \% - 15 \% = 25 \%$ του συνόλου των μαθητών του σχολείου και αυτό αντιστοιχεί σε 50 παιδιά. Άρα το σχολείο έχει

$$50 : \frac{25}{100} = 50 \cdot \frac{100}{25} = 200 \text{ μαθητές.}$$

Έτσι:

❖ η Α' τάξη έχει $200 \cdot \frac{40}{100} = 80$ μαθητές

❖ η Β' τάξη έχει $200 \cdot \frac{45}{100} = 90$ μαθητές

❖ η Γ' τάξη έχει $200 \cdot \frac{15}{100} = 30$ μαθητές

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

☞ **034.** Σε ένα βαθμολογικό κέντρο πανελληνίων εξετάσεων 60 μαθηματικοί αναλαμβάνουν τη διόρθωση των γραπτών στα Μαθηματικά. Σε 5 ημέρες έχουν διορθώσει το $\frac{1}{4}$ των γραπτών. Αν τα υπόλοιπα γραπτά πρέπει να διορθωθούν σε 10 ημέρες, πόσοι επιπλέον μαθηματικοί πρέπει να εργαστούν σε αυτό το βαθμολογικό κέντρο;
(Θεωρείται γνωστό ότι όλοι οι μαθηματικοί διορθώνουν τα γραπτά με τον ίδιο ρυθμό.)
(ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ SAINT JOZEPH)

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζουμε **την Απλή Μέθοδο των Τριών** και βρίσκουμε:

Σε 5 ημέρες οι 60 μαθηματικοί διορθώνουν το $\frac{1}{4}$ των γραπτών

Σε x ημέρες οι 60 μαθηματικοί διορθώνουν το $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ των γραπτών

Τα ποσά είναι ανάλογα.

Επομένως: $x = 5 \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 5 \cdot \frac{12}{4} = 15$ ημέρες χρειάζονται για να διορθωθούν τα

υπόλοιπα γραπτά.

Και πάλι με την **Απλή Μέθοδο των Τριών** έχουμε:

Οι 60 μαθηματικοί χρειάζονται 15 ημέρες

x μαθηματικοί θα χρειαστούν 10 ημέρες

Τα ποσά είναι αντίστροφα.

Επομένως: $x = 60 \cdot \frac{15}{10} = 90$ μαθηματικοί.

Άρα θα πρέπει να εργαστούν $90 - 60 = 30$ επιπλέον μαθηματικοί.

☞ **035.** Ένα δοχείο χρησιμοποιείται για τη συσκευασία λαδιού.

Όταν το δοχείο αυτό είναι κατά 40% άδειο, περιέχει 150 γραμμάρια λάδι περισσότερο από όταν είναι κατά 30% γεμάτο. Αν το βάρος του δοχείου, όταν είναι άδειο, είναι ίσο με το 6% του βάρους του λαδιού που περιέχει όταν είναι γεμάτο, να υπολογίσετε πόσο ζυγίζει το δοχείο αυτό, όταν είναι γεμάτο με λάδι.

(ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ SAINT JOZEPH)

ΛΥΣΗ

Όταν το δοχείο είναι κατά 40% άδειο, αυτό είναι κατά 60% γεμάτο.

Επομένως η διαφορά 60% - 30% = 30%, αντιστοιχεί σε 150 γραμμάρια.

Επομένως το δοχείο γεμάτο έχει $150 : \frac{30}{100} = 150 \cdot \frac{100}{30} = 500$ γραμμάρια λάδι.

Το βάρος του δοχείου, όταν είναι άδειο, είναι ίσο με το 6% του βάρους του λαδιού που περιέχει όταν είναι γεμάτο. Επομένως το βάρος του άδειου δοχείου

είναι ίσο με: $500 \cdot \frac{6}{100} = 30$ γραμμάρια.

Άρα το δοχείο όταν είναι γεμάτο με λάδι, ζυγίζει: $500 + 30 = 530$ γραμμάρια.

☞ **036.** Σε ένα αγρόκτημα εκτρέφονται ζώα. Τα ζώα αυτά καταναλώνουν την ίδια ποσότητα τροφής καθημερινά και οι τροφές τους επαρκούν για 40 ημέρες.

Σε πόσες ημέρες θα καταναλωθούν τα $\frac{7}{15}$ των τροφών από τα ζώα του αγροκτήματος αν ελαττώσουμε την ημερήσια τροφή του κάθε ζώου κατά το $\frac{1}{9}$ αυτής; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

(ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ SAINT JOZEPH)

ΛΥΣΗ

Τα ζώα καταναλώνουν καθημερινά το $\frac{1}{40}$ της τροφής.

Τώρα θα καταναλώνουν το $\frac{1}{40} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1}{45}$ της τροφής.

Άρα οι τροφές φτάνουν για 45 ημέρες.

Τα $\frac{7}{15}$ θα καταναλωθούν σε $45 \cdot \frac{7}{15} = 21$ ημέρες.

☞ **037.** Η 1η Μαΐου του έτους 2018 θα είναι ημέρα Τρίτη. Τι ημέρα θα είναι η 23η Μαΐου του ίδιου έτους;

A. Δευτέρα **B.** Τρίτη **Γ.** Τετάρτη **Δ.** Πέμπτη **Ε.** Παρασκευή
ΠΡΟΤΥΠΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ

ΛΥΣΗ

Από την 1η Μαΐου μέχρι την 23η Μαΐου του ίδιου έτους μεσολαβούν $23 - 1 = 22$ μέρες. Είναι $22 = 3 \cdot 7 + 1$.

Επομένως την 23^η Μαΐου έχουμε μία ημέρα μετά την Τρίτη, δηλαδή θα έχουμε Τετάρτη.

☞ **038.** Το 60% των θεατών σε μια κινηματογραφική προβολή είναι ενήλικες.

Οι υπόλοιποι θεατές είναι παιδιά από τα οποία τα $\frac{3}{4}$ είναι αγόρια.

Τα κορίτσια είναι 150 λιγότερα από τους ενήλικες.

α. Πόσοι είναι οι ενήλικες και πόσα τα παιδιά;

β. Κατά τη διάρκεια της προβολής αυτής ήρθαν μερικά ακόμη παιδιά, οπότε ο αριθμός τους έγινε ίσος με τα $\frac{8}{5}$ των ενηλίκων. Πόσα επιπλέον παιδιά ήρθαν στην προβολή;

(ΠΡΟΤΥΠΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ)

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

ΛΥΣΗ

α. Τα παιδιά αποτελούν το $100\% - 60\% = 40\%$ των θεατών.

Τα κορίτσια είναι το $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ των υπολοίπων.

Επομένως είναι το $\frac{40}{100} \cdot \frac{1}{4} = 10\%$ των θεατών.

Η διαφορά $60\% - 10\% = 50\%$, αντιστοιχεί σε 150 άτομα.

Άρα οι θεατές ήταν $150 : \frac{50}{100} = 150 \cdot \frac{100}{50} = 300$.

Οι ενήλικες ήταν $300 \cdot \frac{60}{100} = 180$ και τα παιδιά ήταν $300 - 180 = 120$.

β. Ο αριθμός των παιδιών είναι ίσος με $180 \cdot \frac{8}{5} = 288$.

Άρα ήρθαν $288 - 120 = 168$ παιδιά.

☞ **039.** Η Μαρία ξόδεψε τα $\frac{3}{8}$ του μισθού της για φαγητό και το $\frac{1}{3}$ των

υπόλοιπων χρημάτων της για έξοδα μετακίνησης.

Τα χρήματα που της περίσσεψαν, τα μοιράστηκε εξίσου με τις αδερφές της.

Κάθε μία (η Μαρία και οι αδερφές της) πήραν το $\frac{1}{12}$ του αρχικού μισθού της

Μαρίας.

α. Πόσες αδερφές έχει η Μαρία;

β. Αν τα χρήματα που πήρε η κάθε μία ήταν 208 ευρώ, πόσα χρήματα ξόδεψε η Μαρία για τις μετακινήσεις της; **(ΠΡΟΤΥΠΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ)**

ΛΥΣΗ

α. Η Μαρία ξόδεψε:

- τα $\frac{3}{8}$ του μισθού της για φαγητό
- έμειναν $\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ του μισθού
- για έξοδα μετακίνησης: $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$ του μισθού

Περίσσεψαν: $1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{24}\right) = 1 - \left(\frac{9}{24} + \frac{5}{24}\right) = \frac{24}{24} - \frac{14}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ του μισθού.

Επομένως το μοιράστηκαν $\frac{5}{12} : \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{1} = 5$ άτομα.

Άρα η Μαρία έχει $5 - 1 = 4$ αδερφές.

β. Τα χρήματα που πήρε η κάθε μία ήταν 208 ευρώ και αντιστοιχούσαν στο

$\frac{1}{12}$ του μισθού. Άρα ο μισθός ήταν $208 \times 12 = 2.496$ ευρώ.

Επομένως η Μαρία ξόδεψε για τις μετακινήσεις της $2.496 \cdot \frac{5}{24} = 520$ ευρώ.

☞ **040.** Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει πλάτος 5 εκατοστά και περίμετρο 64 εκατοστά.

- α. Να βρείτε το μήκος του ορθογωνίου.
β. Να βρείτε το εμβαδόν του.

(Αμερικάνικο Κολέγιο ΑΝΑΤΟΛΙΑ)

ΛΥΣΗ

α. Ο τύπος που μας δίνει την περίμετρο του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2 \cdot (\alpha + \beta)$

Όταν μας δίνονται η περίμετρος και κάποια σχέση μεταξύ των πλευρών, βρίσκουμε την **ημιπερίμετρο**, δηλαδή το **μισό της περιμέτρου**. Αυτό γίνεται για να “απαλλαγούμε” από το 2 του τύπου.

Η ημιπερίμετρος του ορθογωνίου είναι $64 : 2 = 32$ εκατοστά.

Το μήκος του είναι: $32 - 5 = 27$ εκατοστά.

β. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E = \alpha \cdot \beta = 27 \cdot 5 = 135$ εκατοστά.

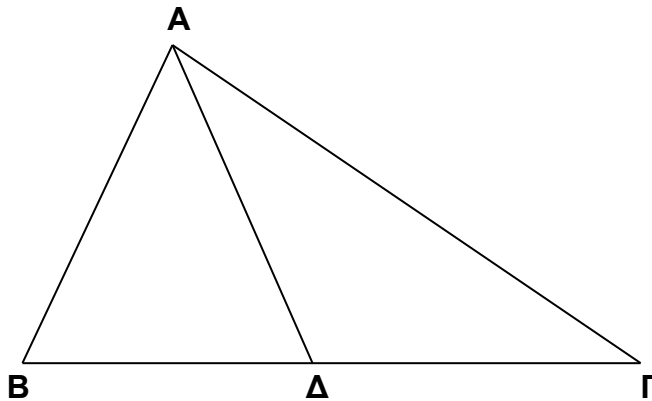
☞ **041.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Delta}$ είναι 32° .

Επίσης είναι $AB = AD = \Gamma\Delta$.

α. Τι είδους τρίγωνα είναι τα ΑΒΔ και ΑΓΔ;

β. Πόσων μοιρών είναι η γωνία $\widehat{A\hat{B}\Delta}$.

γ. Πόσων μοιρών είναι η γωνία $\widehat{A\hat{\Gamma}\Delta}$.



(Αμερικάνικο Κολέγιο ΑΝΑΤΟΛΙΑ)

ΛΥΣΗ

α. Όταν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες ή δύο πλευρές ίσες, τότε είναι ισοσκελές. (Ισχύει και το αντίστροφο: δηλαδή όταν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχει δύο πλευρές ίσες ή δύο γωνίες – τις γωνίες της βάσης – ίσες). Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, γιατί $AB = AD$.

Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, γιατί $AD = \Gamma\Delta$.

Κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου είναι το σημείο όπου τέμνονται οι δύο ίσες πλευρές.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι το σημείο Α και στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι το σημείο Δ.

β. Όταν έχουμε τις δύο γωνίες ενός τριγώνου και θέλουμε να βρούμε την τρίτη γωνία, αφαιρούμε το άθροισμα των δύο γνωστών γωνιών από το 180.

Όταν θέλουμε να βρούμε μία από τις ίσες γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου, αφαιρούμε τη γωνία της κορυφής από το 180 και διαιρούμε με το 2.


Υποδειγματικά λυμένα θέματα

Όταν θέλουμε να βρούμε τη γωνία της κορυφής, αφαιρούμε από το 180 το διπλάσιο μιας από τις ίσες γωνίες.

$$\text{Είναι: } \hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}\hat{\Delta}B = \frac{180^{\circ} - 32^{\circ}}{2} = \frac{148^{\circ}}{2} = 74^{\circ}$$

$$\gamma. \text{ Ισχύει: } \hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 180^{\circ} - \hat{A}\hat{\Delta}B = 180^{\circ} - 74^{\circ} = 106^{\circ}.$$

$$\text{Επομένως: } \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}A = \frac{180^{\circ} - 106^{\circ}}{2} = \frac{74^{\circ}}{2} = 37^{\circ}.$$


 **042.** Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 24 μ. και η μία πλευρά του είναι διπλάσια από την άλλη. Να βρεθούν οι διαστάσεις του (δηλαδή το μήκος και το πλάτος) και το εμβαδόν του. (Εκπαιδευτήρια ΔΕΛΑΣΑΛ)

ΛΥΣΗ

Η ημιπερίμετρος είναι $24 : 2 = 12$ μ.

Χωρίζουμε το 12 σε μερίδια. Έστω ότι 1 μερίδιο είναι για τη μικρότερη πλευρά και 2 μερίδια για τη μεγαλύτερη πλευρά. Τα μερίδια είναι $1 + 2 = 3$.

Επομένως η μικρότερη πλευρά είναι $12 : 3 = 4$ μ. και η μεγαλύτερη είναι: $4 \times 2 = 8$ μ.

 **043.** Το αρχιτεκτονικό σχέδιο είναι σχεδιασμένο με σμίκρυνση 1 : 200.
α. Να βρεθεί το πραγματικό μήκος ενός διαδρόμου, του οποίου το μήκος στο σχέδιο είναι 3 cm.
β. Επίσης να βρεθεί η έκταση που καταλαμβάνει το σαλόνι στο σχέδιο του ίδιου σπιτιού, αν οι πραγματικές διαστάσεις του σαλονιού είναι 5 m x 8 m. (Εκπαιδευτήρια ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΠΑΥΛΟΣ)

ΛΥΣΗ

α. Για την κλίμακα, είτε πρόκειται για σμίκρυνση, είτε για μεγέθυνση, πρέπει να γνωρίζουμε ότι:

- $\text{κλίμακα} = \frac{\text{απόσταση σχεδίου}}{\text{πραγματική απόσταση}}$
- $\text{πραγματική απόσταση} = \frac{\text{απόσταση σχεδίου}}{\text{κλίμακα}}$
- $\text{απόσταση σχεδίου} = \text{πραγματική απόσταση} \times \text{κλίμακα}$

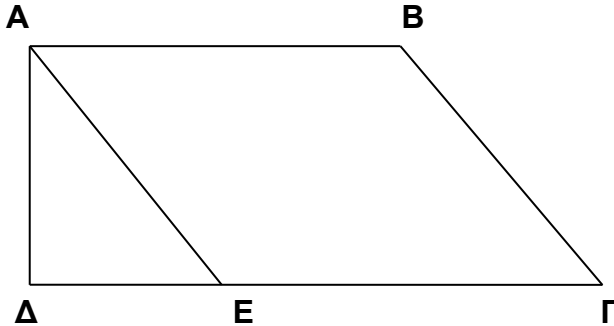
Το πραγματικό μήκος του διαδρόμου είναι:

$$3 \cdot 200 = 600 \text{ cm} = 600 : 100 \text{ m} = 6 \text{ m}.$$

β. Η έκταση που καταλαμβάνει το σαλόνι είναι $5 \cdot 8 = 40 \text{ m}^2$.

Επομένως στο σχέδιο καταλαμβάνει έκταση $40 : 200 = 0,2 \text{ m}^2$.

☞ **044.** Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, όπου το ύψος του $ΑΔ = x$ δίνεται σε cm και είναι η λύση της εξίσωσης $x \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3}$



- α. Αν το άθροισμα των βάσεων ΑΒ και ΓΔ ισούται με 34 cm , να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.
 β. Φέρνουμε την ΑΕ παράλληλη προς τη ΒΓ. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ ισούται με 24 cm^2 , να υπολογίσετε την πλευρά ΔΕ.
 γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ.
 δ. Να υπολογίσετε την πλευρά ΕΓ.
 ε. Για τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ ισχύει το εξής: αν από το τριπλάσιο της πλευράς ΒΓ αφαιρέσουμε το διπλάσιο της πλευράς ΑΒ, βρίσκουμε αποτέλεσμα 2. Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ.

(ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΚΑΛΑΜΑΡΙ)

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε το ύψος ΑΔ.

$$x \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{10}{12} - \frac{9}{12}\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} : \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{1} \Leftrightarrow x = 8$$

Επομένως $ΑΔ = 8\text{ cm}$.

α. Το εμβαδόν του τραπέζιου ΑΒΓΔ είναι ίσο με:

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{(Β + β) \cdot υ}{2} = \frac{(ΓΔ + ΑΒ) \cdot ΑΔ}{2} = \frac{34 \cdot 8}{2} = 136\text{ cm}^2.$$

β. Από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ, θα βρούμε την ΔΕ. Είναι:

$$(ΑΔΕ) = 24 \Leftrightarrow \frac{ΑΔ \cdot ΔΕ}{2} = 24 \Leftrightarrow \frac{8 \cdot ΔΕ}{2} = 24 \Leftrightarrow 4 \cdot ΔΕ = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ΔΕ = \frac{24}{4} \Leftrightarrow ΔΕ = 6\text{ cm}$$

γ. Είναι: $(ΑΒΓΕ) = (ΑΒΓΔ) - (ΑΔΕ) = 136 - 24 = 112\text{ cm}^2$.

δ. Είναι: $(ΑΒΓΕ) = ΕΓ \cdot ΑΔ \Leftrightarrow 112 = ΕΓ \cdot 8 \Leftrightarrow ΕΓ = \frac{112}{8} \Leftrightarrow ΕΓ = 14\text{ cm}$.

ε. Είναι: $ΑΒ = ΕΓ = 14\text{ cm}$. Έχουμε:

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

$$\begin{aligned} 3 \cdot B\Gamma - 2 \cdot AB &= 2 \Leftrightarrow 3 \cdot B\Gamma - 2 \cdot 14 = 2 \Leftrightarrow 3 \cdot B\Gamma - 28 = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \cdot B\Gamma &= 2 + 28 \Leftrightarrow 3 \cdot B\Gamma = 30 \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{30}{3} \Leftrightarrow B\Gamma = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

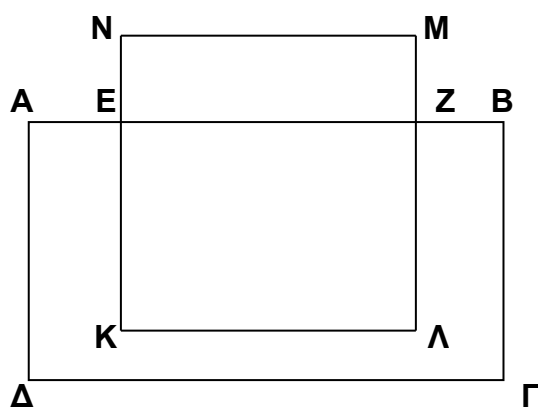
045. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 40 εκ. και μήκος μεγαλύτερο κατά 4 εκ. από το πλάτος του. Το τετράγωνο ΚΛΜΝ έχει πλευρά 9 εκ. και το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΚΛΖΕ είναι τα $\frac{3}{4}$ του

εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΚΛΖΕ.

γ. Να βρείτε το μήκος του ΖΜ.



(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΜΑΝΤΟΥΛΙΔΗ)

ΛΥΣΗ

α. Η ημιπερίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $40 : 2 = 20$ εκ.

Έχουμε $20 - 4 = 16$ εκ.

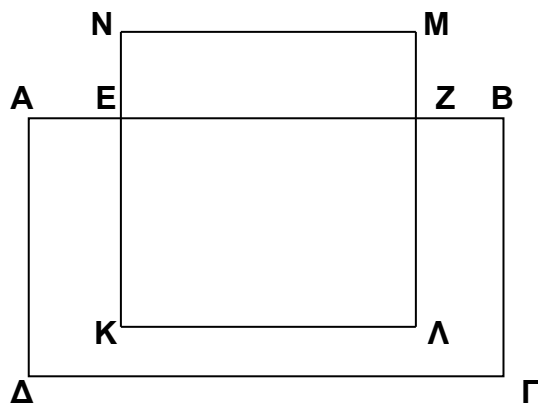
Επομένως το πλάτος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $16 : 2 = 8$ εκ. και

το μήκος του είναι $8 + 4 = 12$ εκ.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι:


$$E = \alpha \cdot \beta = 8 \cdot 12 = 96 \text{ τ.εκ.}$$

β. Το εμβαδόν του ΚΛΖΕ είναι $E = \frac{3}{4} \cdot 96 = 72 \text{ τ.εκ.}$



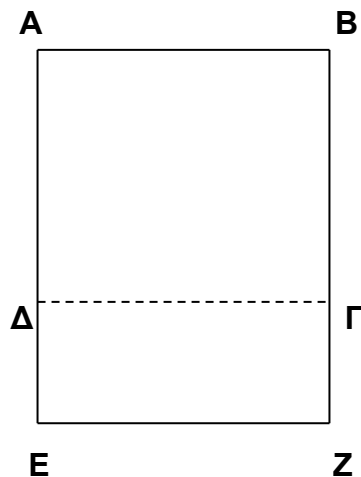
$$\gamma. \text{ Έχουμε: } \begin{cases} (ΚΛΖΕ) = ΚΛ \cdot ΛΖ \\ 72 = 9 \cdot ΛΖ \\ ΛΖ = 72 : 9 \\ ΛΖ = 8 \text{ εκ.} \end{cases}$$

Επομένως $ZM = ΛM - ΛΖ = 9 - 1 = 8 \text{ εκ.}$

 **046.** Το παρακάτω οικόπεδο ABZE αποτελείται από ένα κομμάτι σχήματος τετραγώνου ABΓΔ και ένα κομμάτι σχήματος ορθογωνίου ΔΓZE. Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΔΓZE είναι 24 τ. μ. και το μήκος της ΔΕ (σε μέτρα) είναι η λύση της εξίσωσης:

$$(3^2 + 2^3 - 2^2) \cdot x = (7 - 5) \cdot \left(4^3 + 4 \cdot 5 - 6 \cdot 2.013 \cdot \frac{1}{2.013} \right) \cdot \frac{1}{3}$$

να βρείτε:



α. Πόσο είναι το μήκος του ΔΕ.

Για $\Delta E = 4 \text{ μ.}$ να βρείτε:

β. πόσο είναι το συνολικό εμβαδό του οικοπέδου ABZE

γ. αν για την τοποθέτηση χλοοτάπητα (γκαζόν) στο κομμάτι ΔΓZE χρειάστηκαν 4 όμοια τσουβάλια χλοοτάπητα, πόσα τσουβάλια χλοοτάπητα χρειάζονται για την τοποθέτηση χλοοτάπητα σε όλο το οικόπεδο ABZE;

δ. πόσο θα κοστίσει η τοποθέτηση συρματοπλέγματος στο οικόπεδο, σύμφωνα με το σχέδιο, εάν η τιμή του εξωτερικού συρματοπλέγματος είναι 8 ευρώ το μέτρο και η τιμή του εσωτερικού συρματοπλέγματος (που χωρίζει τα οικόπεδα ABΓΔ και ΔΓZE) είναι 5 ευρώ το μέτρο;

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΠΑΝΟΥ)

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

ΛΥΣΗ

α. Λύνουμε την εξίσωση:

$$(3^2 + 2^3 - 2^2) \cdot x = (7 - 5) \cdot \left(4^3 + 4 \cdot 5 - 6 \cdot 2.013 \cdot \frac{1}{2.013} \right) \cdot \frac{1}{3}$$

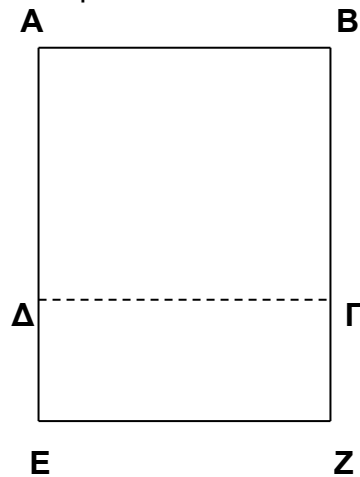
$$(9 + 8 - 4) \cdot x = 2 \cdot (64 + 20 - 6) \cdot \frac{1}{3}$$

$$13 \cdot x = 52$$

$$x = 52 : 13$$

$$x = 4$$

Επομένως $\Delta E = 4 \mu$.



β. Εφ' όσον $\Delta E = 4 \mu$, έχουμε:

$$(\Delta \Gamma Z E) = \alpha \cdot \beta$$

$$(\Delta \Gamma Z E) = \Delta \Gamma \cdot \Delta E$$

$$24 = \Delta \Gamma \cdot 4$$

$$\Delta \Gamma = 24 : 4$$

$$\Delta \Gamma = 6 \mu.$$

Επομένως: $(\text{AB}\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \alpha = \Delta \Gamma \cdot \Delta \Gamma = 6 \cdot 6 = 36 \tau. \mu.$

Τελικά: $(\text{ABZE}) = (\text{AB}\Gamma\Delta) + (\Delta \Gamma Z E) = 36 + 24 = 60 \tau. \mu.$

γ. Εφ' όσον για την τοποθέτηση χλοοτάπητα στο κομμάτι $\Delta \Gamma Z E$ χρειάστηκαν 4 όμοια τσουβάλια, θα χρειαστούμε ένα τσουβάλι για κάθε $24 : 4 = 6 \tau. \mu.$

Για όλο το ABZE χρειάζονται $60 : 6 = 10$ τσουβάλια χλοοτάπητα.

δ. Η περίμετρος του ABZE είναι:

$$\Pi = \text{AB} + \text{B}\Gamma + \Gamma\text{Z} + \text{Z}\text{E} + \text{E}\Delta + \Delta\text{A} = 6 + 6 + 4 + 6 + 4 + 6 = 32 \mu.$$

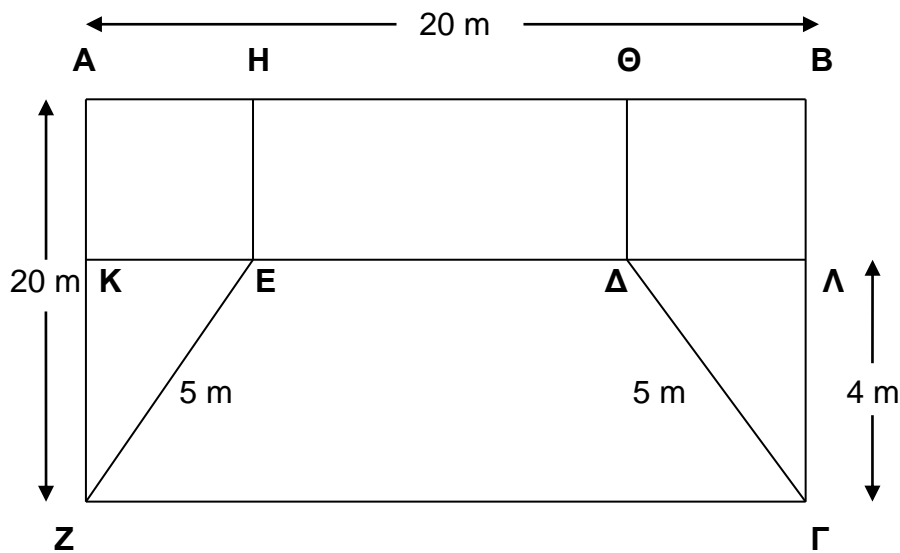
Άρα για την εξωτερική περίφραξη θα χρειαστούν $32 \times 8 = 256$ ευρώ.

Για την εσωτερική περίφραξη θα χρειαστούν $6 \times 5 = 30$ ευρώ.

Συνολικά θα χρειαστούν $256 + 30 = 286$ ευρώ.

☞ **047.** Για το παρακάτω σχήμα δίνεται ότι τα τετράπλευρα ΑΗΕΚ και ΘΒΛΔ είναι τετράγωνα και ότι ισχύει:

- $AB = 20 \mu.$
- $AZ = 7 \mu.$
- $\Lambda\Gamma = 4 \mu.$
- $ZE = 5 \mu.$
- $\Delta\Gamma = 5 \mu.$



- α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta EZ$
- β. Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta EZ$.

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΠΑΝΟΥ)

ΛΥΣΗ

Είναι: $AK = AZ - KZ = 7 - 4 = 3 \mu.$

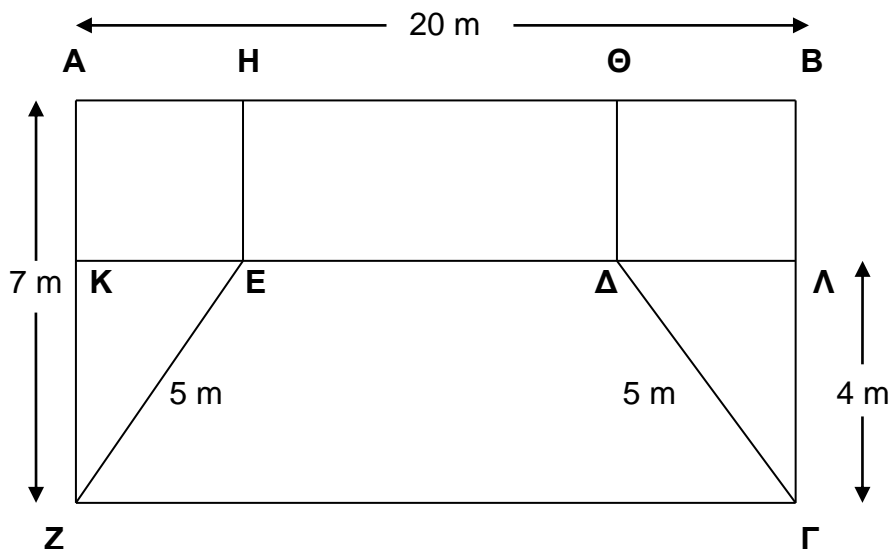
Επομένως: $(AHEK) = (\Theta B\Lambda\Delta) = \alpha \cdot \alpha = AK \cdot AK = 3 \cdot 3 = 9 \tau. \mu.$

Επίσης: $H\Theta = 20 - (3 + 3) = 20 - 6 = 14 \mu.$

Επομένως: $(H\Theta\Delta E) = \alpha \cdot \beta = H\Theta \cdot \Theta\Delta = 14 \cdot 3 = 42 \tau. \mu.$

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

$$\text{Τέλος: } (ΚΕΖ) = (\Delta ΛΓ) = \frac{\beta \cdot \nu}{2} = \frac{ΚΕ \cdot ΚΖ}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ τ.μ.}$$



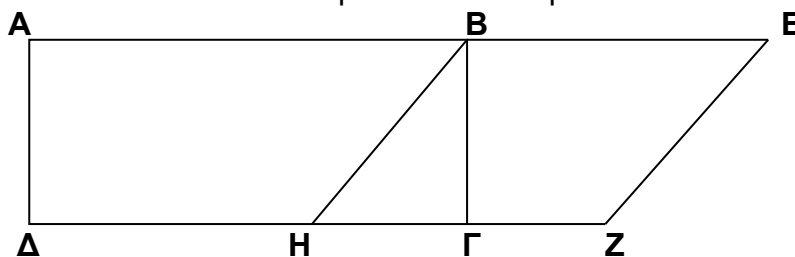
$$\text{Άρα: } (ΑΒΓΔΕΖ) = 2 \times (ΑΗΕΚ) + (ΗΘΔΕ) + 2 \times (ΚΕΖ) =$$

$$= 2 \times 9 + 42 + 2 \times 6 = 18 + 42 + 12 = 72 \text{ τ. μ.}$$

Για την περίμετρο του ΑΒΓΔΕΖ έχουμε:

$$\Pi = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΑ = 20 + 7 + 5 + 14 + 5 + 7 = 58 \mu.$$

☞ **048.** Δίνεται το οικοπέδο ΑΕΖΔ για το οποίο γνωρίζουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με εμβαδό 128 τ. μ. και το ΒΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι ΑΒ = 16 μ. και ΒΕ = 12 μ.:



α. Να βρείτε πόσο είναι το μήκος ΑΔ;

Για ΑΔ = 8 μ.

β. να βρείτε το εμβαδόν του ΒΕΖΗ

Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΗΓ = 6 μ. και ΕΖ = 10 μ., τότε:

γ. να βρείτε πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν και η περίμετρος του οικοπέδου ΑΕΖΔ.

δ. να βρείτε πόσο θα πληρώσει ο ιδιοκτήτης του οικοπέδου ΑΕΖΔ συνολικά, εάν θέλει να το περιφράξει (με κόστος 10 ευρώ το μέτρο) καθώς και να το πλακοστρώσει (με κόστος 15 ευρώ το τετραγωνικό μέτρο).

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΠΑΝΟΥ)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

$$(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \beta$$

$$(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot A\Delta$$

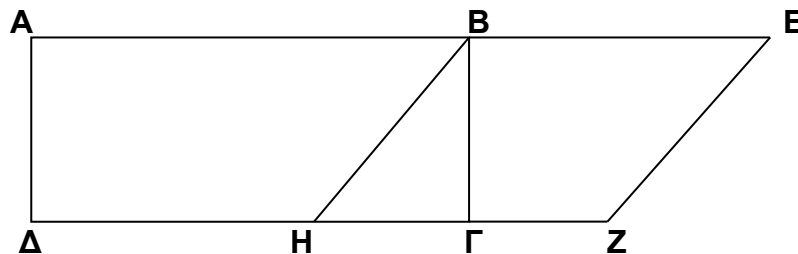
$$128 = 16 \cdot A\Delta$$

$$A\Delta = 128 : 16$$

$$A\Delta = 8 \mu.$$

β. Έχουμε:

$$(BEZ) = \beta \cdot \nu = BE \cdot B\Gamma = 12 \cdot 8 = 96 \tau. \mu.$$



γ. Είναι: $\Gamma Z = HZ - H\Gamma = BE - H\Gamma = 12 - 6 = 6 \mu.$

Έτσι:

$$(BEZ\Gamma) = \frac{(B + \beta) \cdot \nu}{2} = \frac{(BE + \Gamma Z) \cdot B\Gamma}{2} = \frac{(12 + 6) \cdot 8}{2} = 18 \cdot 4 = 72 \tau. \mu.$$

Άρα: $(AEZ\Delta) = (AB\Gamma\Delta) + (BEZ\Gamma) = 128 + 72 = 200 \tau. \mu.$

$$\text{Επίσης: } \Pi = AB + BE + EZ + Z\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 16 + 12 + 10 + 6 + 16 + 8 = 68 \mu.$$

δ. Η περίφραξη κοστίζει: $68 \times 10 = 680$ ευρώ.

Η πλακόστρωση κοστίζει: $200 \times 15 = 3.000$ ευρώ.

Άρα ο ιδιοκτήτης θα πληρώσει: $680 + 3.000 = 3.680$ ευρώ.

☞ **049.** Αν το εμβαδό ενός τετραγώνου μειωθεί κατά 20%, τότε θα προκύψει τετράγωνο πλευράς 6 cm . Πόσο τοις εκατό θα πρέπει να αυξηθεί το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου, για να προκύψει τετράγωνο εμβαδού 63 cm^2 ;

A. 40 % **B.** 30 % **Γ.** 45 % **Δ.** 50 % **E.** 60 %

(PIERCE)

ΛΥΣΗ

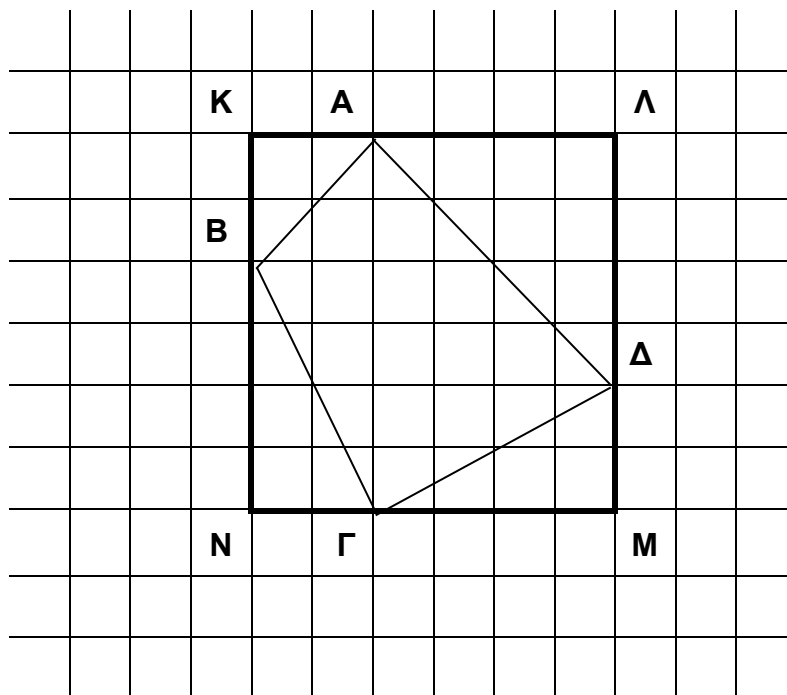
Το τετράγωνο πλευράς 6 cm έχει εμβαδόν: $E = \alpha \cdot \alpha = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$.

Επομένως το αρχικό τετράγωνο έχει εμβαδόν: $E = 36 : \frac{80}{100} = 36 \cdot \frac{100}{80} = 45 \text{ cm}^2$.

Έχουμε $63 - 45 = 18 \text{ cm}^2$. Επομένως το αρχικό τετράγωνο πρέπει να αυξηθεί κατά $\frac{18}{45} = 0,40 = 40 \%$.

Υποδειγματικά λυμένα θέματα

☞ **050. Α.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετράπλευρου ΑΒΓΔ στο παραπάνω σχήμα είναι 18 τ. εκ.



Β. Σε ένα παραλληλόγραμμο η μία του πλευρά είναι τριπλάσια σε μήκος από μια άλλη του πλευρά. Αν το παραλληλόγραμμο αυτό έχει περίμετρο 16 εκ. και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τετράπλευρου ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε τα δύο ύψη του.
(ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ SAINT JOZEPH)

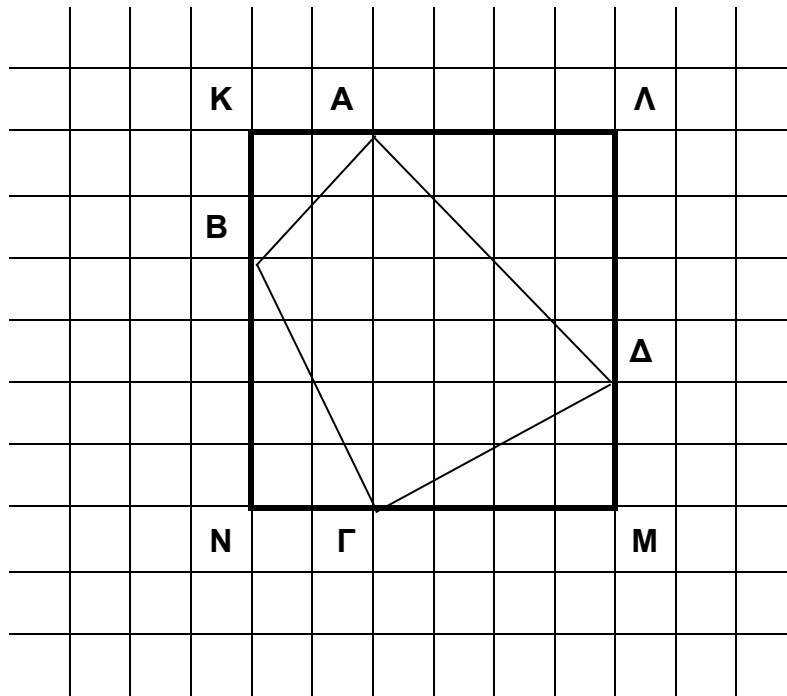
ΛΥΣΗ

Α. Έχουμε:

- $(ΚΛΜΝ) = α \cdot α = 6 \cdot 6 = 36 \text{ τ. εκ.}$
- $(ΚΑΒ) = \frac{\beta \cdot \nu}{2} = \frac{ΚΑ \cdot ΚΒ}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ τ. εκ.}$
- $(ΑΛΔ) = \frac{\beta \cdot \nu}{2} = \frac{ΑΛ \cdot ΛΔ}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ τ. εκ.}$
- $(ΔΜΓ) = \frac{\beta \cdot \nu}{2} = \frac{ΓΜ \cdot ΔΜ}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \text{ τ. εκ.}$
- $(ΒΝΓ) = \frac{\beta \cdot \nu}{2} = \frac{ΝΓ \cdot ΒΝ}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ τ. εκ.}$

Επομένως:

$$\begin{aligned} (ΑΒΓΔ) &= (ΚΛΜΝ) - [(ΚΑΒ) + (ΑΛΔ) + (ΔΜΓ) + (ΒΝΓ)] = \\ &= 36 - (2 + 10 + 2 + 4) = 36 - 18 = 18 \text{ τ.εκ.} \end{aligned}$$



Β. Η ημιπερίμετρος του παραλληλογράμμου είναι ίση με $16 : 2 = 8$ εκ.

Έχουμε $1 + 3 = 4$ μερίδια. Επομένως η μικρότερη πλευρά του είναι

$8 : 4 = 2$ εκ. και η μεγαλύτερη πλευρά του είναι $3 \times 2 = 6$ εκ.

Το ύψος του παραλληλογράμμου που αντιστοιχεί στη μικρότερη πλευρά του είναι ίσο με $18 : 2 = 9$ εκ.

Το ύψος του παραλληλογράμμου που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη πλευρά του είναι ίσο με $18 : 6 = 3$ εκ.