



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2019

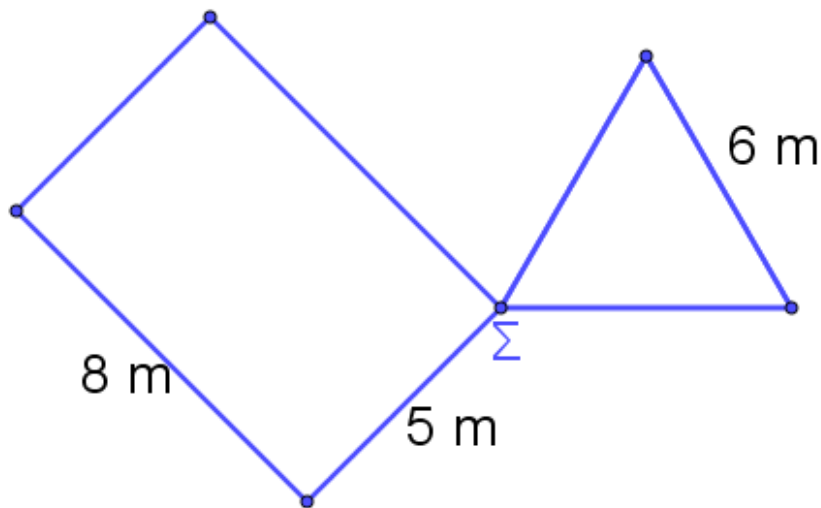
Στ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Ημερομηνία: 02/11/2019

Ωρα Εξέτασης: 14:00-16:00

### Πρόβλημα 1

Δύο προγραμματισμένα ρομποτάκια ξεκινούν ταυτόχρονα στις 10 π. μ. από το σημείο  $\Sigma$  και κινούνται προς διαφορετικές διαδρομές. Το ρομπότ  $A$  κινείται γύρω από ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά  $6\text{ m}$  και το ρομπότ  $B$  κινείται γύρω από ένα ορθογώνιο με μήκος  $8\text{ m}$  και πλάτος  $5\text{ m}$ . Τα δύο ρομπότ κινούνται με την ίδια σταθερή ταχύτητα και χρειάζονται  $4$  λεπτά για κάθε ένα μέτρο που διανύουν. Τι ώρα θα ξανασυναντηθούν στο σημείο  $\Sigma$ ;



### Προτεινόμενη Λύση

Το ρομπότ  $A$  θα επανέρχεται στο αρχικό σημείο  $\Sigma$  κάθε  $3 \times 6 \times 4 = 72$  λεπτά

Το ρομπότ  $B$  θα επανέρχεται στο αρχικό σημείο  $\Sigma$  κάθε  $26 \times 4 = 104$  λεπτά

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των  $(72, 104)$  είναι ίσο με  $8 \times 9 \times 13 = 936$   
γιατί  $72 = 8 \times 9$ ,  $104 = 8 \times 13$

Επομένως θα συναντηθούν για πρώτη φορά μετά από  $936$  λεπτά που ισοδυναμεί με  $15$  ώρες και  $36$  λεπτά δηλαδή **στις 01: 36**.

(Θα συναντιώνται κάθε  $15$  ώρες και  $36$  λεπτά, όταν το σύστημα συνεχίσει να λειτουργεί)

## Πρόβλημα 2

Σε έναν πίνακα με τρεις γραμμές και δύο στήλες γράφουμε δύο αριθμούς στην πρώτη γραμμή. Κάθε επόμενη γραμμή περιέχει το άθροισμα και τη διαφορά των δύο αριθμών της προηγούμενης γραμμής, όπως φαίνεται στο σχήμα το παράδειγμα.

7	3
10	4
14	6

Σε ένα πίνακα με πέντε γραμμές και δύο στήλες ο οποίος συμπληρώνεται με τον ίδιο τρόπο, οι δύο αριθμοί στην τελευταία 5<sup>η</sup> γραμμή του είναι το 96 και 64. Ποιοι είναι οι δύο αριθμοί της 1<sup>ης</sup> γραμμής του πίνακα;

;	;
96	64

### Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε ότι στον  $3 \times 2$  πίνακα ισχύει  $\frac{14+6}{2} = 10$  και  $\frac{14-6}{2} = 4$  δηλαδή από τις πληροφορίες της τελευταίας γραμμής με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να υπολογίσουμε τους δύο αριθμούς της αμέσως προηγούμενης γραμμής.

Με όμοιο τρόπο έχουμε  $\frac{10+4}{2} = 7$ ,  $\frac{10-4}{2} = 3$  καταλήγοντας έτσι στην πρώτη γραμμή.

Με ανάλογο τρόπο στον  $5 \times 2$  πίνακα μπορούμε να υπολογίσουμε τους δύο αριθμούς κάθε προηγούμενης γραμμής αφού γνωρίζουμε τους αριθμούς της τελευταίας γραμμής :

✓ στην τέταρτη γραμμή:  $\frac{96+64}{2} = 80$ ,  $\frac{96-64}{2} = 16$

✓ στην τρίτη γραμμή:  $\frac{80+16}{2} = 48$ ,  $\frac{80-16}{2} = 32$

✓ στην δεύτερη γραμμή:  $\frac{48+32}{2} = 40$ ,  $\frac{48-32}{2} = 8$

✓ στην πρώτη γραμμή:  $\frac{40+8}{2} = 24$ ,  $\frac{40-8}{2} = 16$

24	16
40	8
48	32
80	16
96	64

### Πρόβλημα 3

Οι φυσικοί αριθμοί 1,2,3,4, ... γράφονται σε ένα πίνακα που έχει πέντε γραμμές και ατέλειωτες στήλες, όπως φαίνεται στο σχήμα.

1								9								17					
	2						8		10							16	*				
		3				7				11					15			*			...
			4		6						12		14						*		...
				5								13								...	

- α. Σε ποια γραμμή βρίσκεται ο αριθμός 47;  
β. Σε ποια γραμμή βρίσκεται ο αριθμός 124;

### Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε ότι :

- ✓ στην πρώτη γραμμή οι αριθμοί μας είναι: 1,9,17, ....  
(αρχίζουν από το 1 και αυξάνονται σε κάθε επόμενο αριθμό κατά 8)  
Δηλαδή έχουν τη γενική μορφή:  $8n - 7$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

- ✓ στην τρίτη γραμμή οι αριθμοί μας είναι: 3,7,11, ....  
(αρχίζουν από το 3 και αυξάνονται σε κάθε επόμενο αριθμό κατά 4)  
Δηλαδή έχουν τη γενική μορφή :  $4n - 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

- ✓ στην πέμπτη γραμμή οι αριθμοί μας είναι: 5,13,21, ....  
(αρχίζουν από το 5 και αυξάνονται σε κάθε επόμενο αριθμό κατά 8)  
Δηλαδή έχουν τη γενική μορφή:  $8n - 3$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

α. το 47 βρίσκεται στην τρίτη γραμμή για  $n = 12$ , δηλαδή ο 12<sup>ος</sup> αριθμός του μοτίβου, γιατί  $4 \times 12 - 1 = 47$

β. Το 124 είναι άρτιος και έτσι δεν μπορεί να βρίσκεται στην 1<sup>η</sup>, ή στην 3<sup>η</sup> ή στην 5<sup>η</sup> γραμμή γιατί σε αυτές τις γραμμές εμφανίζονται πάντα περιττοί αριθμοί.

Στην 2<sup>η</sup> γραμμή οι περιττοί όροι (δηλαδή 1<sup>ος</sup>, 3<sup>ος</sup>, 5<sup>ος</sup> κτλ) είναι: 2,10, 18, ....  $(8n - 6)$  και έτσι δεν μπορεί το 124 να είναι αριθμός αυτού του μοτίβου.

Στην 2<sup>η</sup> γραμμή οι άρτιοι όροι (δηλαδή 2<sup>ος</sup>, 4<sup>ος</sup>, 6<sup>ος</sup> κτλ) είναι: 8,16, 24, ....  $(8n)$  και έτσι δεν μπορεί πάλι το 124 να είναι αριθμός αυτού του μοτίβου.

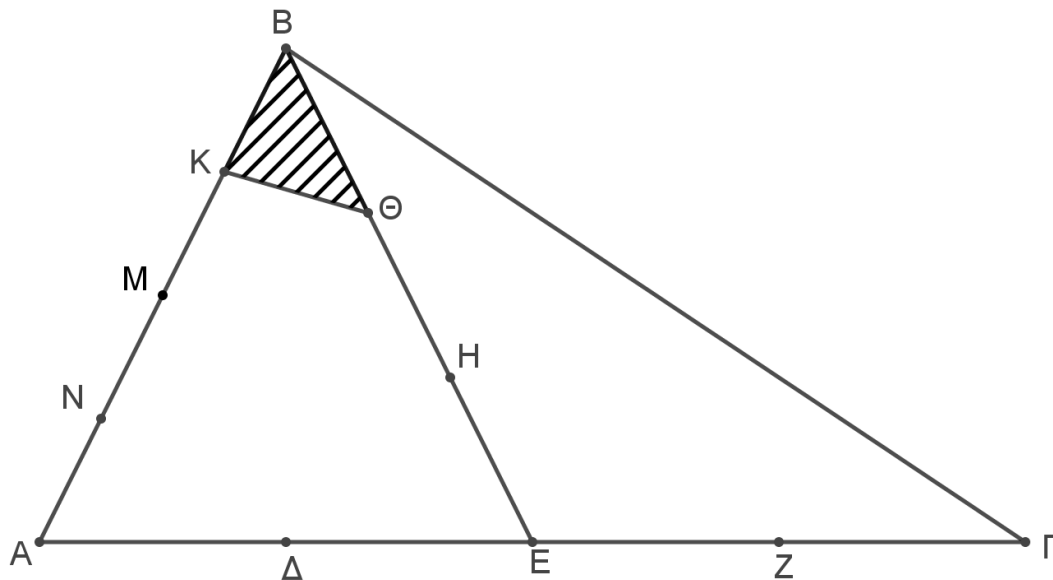
Στην τέταρτη γραμμή οι αριθμοί μας είναι: 4,6,12,14,28, .... ( δηλαδή αρχίζουν από το 4 και έχουμε:

- ✓ Για τον δεύτερο αριθμό προσθέτουμε δύο στον προηγούμενο του  $(4 + 2 = 6)$
- ✓ για τρίτο αριθμό διπλασιάζουμε τον προηγούμενό του.  $(6 \times 2 = 12)$
- ✓ Για τον τέταρτο αριθμό προσθέτουμε 2 στον προηγούμενό του για τον πέμπτο αριθμό διπλασιάζουμε τον προηγούμενό του και συνεχίζεται αυτό το μοτίβο σε κάθε επόμενο: προσέτω 2, διπλασιάζω, προσέτω 2, διπλασιάζω, ....κτλ.

Έτσι το 124 βρίσκεται **στην 4η γραμμή** γιατί έχουμε: 4,6,12,14,28,30,60,62, **124**, ...

#### Πρόβλημα 4

Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει εμβαδόν  $36 \text{ cm}^2$ . Τα σημεία  $\Delta, E, Z$  χωρίζουν την πλευρά  $A\Gamma$  σε τέσσερα ίσα τμήματα, τα σημεία  $N, M, K$ , χωρίζουν την πλευρά  $AB$  επίσης σε τέσσερα ίσα τμήματα και τα σημεία  $\Theta, H$  χωρίζουν την  $BE$  σε τρία ίσα τμήματα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $B\Theta K$ .



#### Προτεινόμενη λύση

Είναι γνωστό ότι δύο τρίγωνα τα οποία έχουν το ίδιο ύψος, αλλά και ίσες βάσεις τότε έχουν και τα ίδια εμβαδά.

Το  $BE$  χωρίζει το τρίγωνο  $AB\Gamma$  σε δύο τρίγωνα με ίσο εμβαδόν (ίσες βάσεις και ίδιο ύψος)

$$\text{Άρα } E_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18 \text{ cm}^2 \text{ (γιατί } AE = E\Gamma \text{)}$$

$$\text{Έχουμε } E_{BKE} = \frac{1}{4} \cdot E_{ABE} = \frac{1}{4} \cdot 18 = 4,5 \text{ cm}^2 \text{ (γιατί } BK = \frac{1}{4} AB \text{ και ίσα ύψη)}$$

$$E_{B\Theta K} = \frac{1}{3} \cdot E_{BKE} = \frac{1}{3} \cdot 4,5 = 1,5 \text{ cm}^2 \text{ (γιατί } B\Theta = \frac{1}{3} BE \text{ και ίσα ύψη)}$$